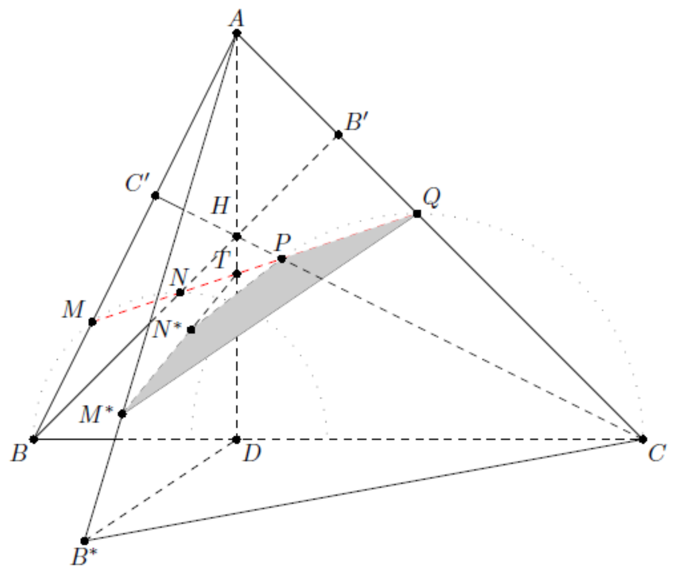
Problema 2.

Considerăm tetraedrul ABCD, cu muchia AD perpendiculară pe planul (BCD). Fie X un punct oarecare al muchiei AD și punctul Y pe (AD) încât m(∠ Y CD) = m(∠ DAB). Cercul cu centrul pe CD care trece prin C și X intersectează AC și CY în P și Q se notează cu C_1, iar cercul cu centrul pe BD care trece prin B și X taie AB și BY în M și N, se notează cu C_2. Arătați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare și conciclice.

(Petru Braica)



Soluție.

Rotim fața (ABD) în planul feței (ACD), punctul B devine B_1, M devine M_1, N devine N_1 iar cercul C_2 devine C_2*. Vom demonstra coliniaritatea punctelor M_1, N_1, P și Q care va atrage coplanaritatea punctelor M, N, P și Q, întrucât MN și PQ vor fi concurente în punctul de intersecție al dreptei care conține punctele M_1, N_1, P și Q cu AD, asta după ce refacem tetraedrul inițial. Revenim la coliniaritatea dorită. Fiindcă Y este ortocentrul triunghiului AB_1C, comform ipotezei că ∠YCD este congruent cu ∠DAB iar AD e perpendiculară pe B_1C, observăm că AY este axa radicală a cercurilor C_1 și C_2*, deci $YN \cdot B_1Y = YP \cdot CY$ și $AM_1 \cdot AB = AQ \cdot AC$, astfel că M_1P și N_1Q sunt antiparalele la BC. Dacă notăm cu B* punctul diametral opus lui B_2 in cercul C_2*, din inscriptibilitatea patrulaterului $B_1M_1N_1B$* obținem că și M_1N_1 antiparalelă la BC. Din unicitatea antiparalelei la BC prin punctul M_1 obținem coliniaritatea punctelor M_1, N_1, P și Q. Cu asta coplanaritatea este justificată. Pentru inscriptibilitate este suficient să observăm că dacă notăm cu O intersecția perpendicularelor în centrele cercurilor C_1 și C_2, pe planele acestora avem imediat că OX = OP = OQ = OM = OM. (folosind proprietatea medianei corespunzătoare ipotenuzei la un triunghi dreptunghic). Am obținut astfel că punctele M, N, P și Q sunt situate pe sferă cu centrul în O și de rază OX, dar în același timp sunt coplanare. Cum intersecția dintre un plan și o sferă este un cerc concluzia rezultă imediat.