Problema 4. Numerele naturale sunt scrise sub forma următorului tabel

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
...	...	...	...	...	...

a) Care sunt primul şi ultimul număr de pe rândul 100?

b) Calculăm produsul tuturor numerelor care sunt scrise pe un rând. Pe câte dintre rânduri acest produs nu se divide cu 5?

* * *

Soluţie a) Pe rândul 2 sunt două numere şi ultimul număr este

$$3 = 1 + 2.$$

Pe rândul 3 sunt trei numere şi ultimul număr este

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Pe rândul 4 sunt patru numere şi ultimul număr este

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4.$$

Deducem că pe rândul 100 sunt o sută de numere şi ultimul număr este

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5050.$$

Dacă primul număr de pe rândul 100 este a trebuie să avem

$$5050 - a + 1 = 100,$$

adică

$$5051 - a = 100,$$

de unde

$$a = 5051 - 100 = 4951.$$

b) Pe rândul 1 produsul este 1, pe rândul 2 produsul este 6, iar aceste numere nu se divid cu 5.

Pe rândurile 3, 4 şi 5 obţinem produse care se divid cu 5.

Vom arăta că orice secvenţă de cinci numere consecutive conţine un număr divizibil cu 5.

Fie $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4$ cinci numere consecutive.

Dacă $a = 5k$, cu k număr natural, atunci a este divizivil cu 5.

Dacă $a = 5k+1$, cu k număr natural, atunci $a+4 = 5k+5$ şi este divizivil cu 5.

Dacă $a = 5k+2$, cu k număr natural, atunci $a+3 = 5k+5$ şi este divizivil cu 5.

Dacă $a = 5k+3$, cu k număr natural, atunci $a+2 = 5k+5$ şi este divizivil cu 5.

Dacă $a = 5k+4$, cu k număr natural, atunci $a+1 = 5k+5$ şi este divizivil cu 5.

În concluzie, cu excepţia rândurilor 1 şi 2, toate produsele se vor divide cu 5.