Lecție pentru clasa a VII-a,
Diana Tolu, clasa a IX-a

Lecția propusă se adresează juniorilor
Țolu Diana, clasa a IX-a, ICHB

Simediane

În continuare, vom demonstra multe proprietăți frumoase specifice simedianelor care se vor dovedi utile în rezolvarea problemelor de olimpiadă și vom stabili legături între diferite centre ale triunghiurilor.

Vom începe cu un rezultat bine cunoscut legat de semidreptele izogonale în general.

1. (**Teorema lui Steiner**) Dacă AD și AE sunt ceviene izogonale în triunghiul ABC, atunci are loc egalitatea:

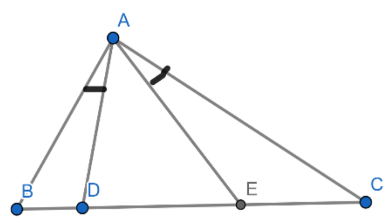
$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EB}{EC} = \frac{AB^2}{AC^2} \ .$$

Demonstrație: Avem că

$\frac{DB}{DC} = \frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin DAB}{\sin DAC}$ și $\frac{EB}{EC} = \frac{[ABE]}{[ACE]} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin EAB}{\sin EAC}$.

De aici, ținând cont de faptul că ∠DAB=∠EAC și ∠DAC=∠EAB, înmulțind cele două relații anterioare, obținem că

$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EB}{EC} = \frac{AB^2}{AC^2}$,



adică ceea ce ne-am propus.

//Reciproca teoremei lui Steiner este, de asemenea, adevarată și o lăsăm ca exercițiu cititorului.

1.a. Din **1.** deducem că: În triunghiul ABC cu X pe latura BC, avem că

$$\frac{XB}{XC} = \frac{AB^2}{AC^2} ,$$

dacă și numai dacă AX este A-simediana triunghiului ABC.

Aceasta reprezintă probabil cea mai importantă proprietate care caracterizează simediana dusă din vârful A într-un triunghi.

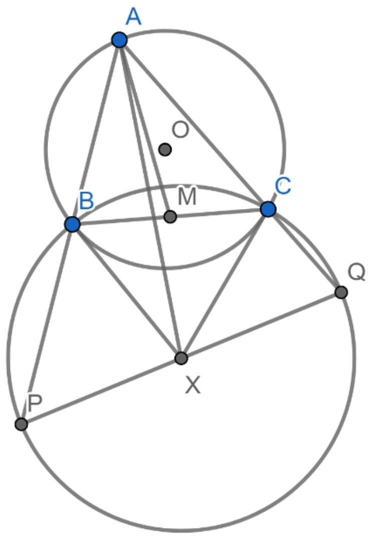
2. Fie X punctul de intersecție al tangentelor duse din B și C la cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci AX coincide cu simediana triunghiului ABC.

Acesta constituie unul dintre cele mai frumoase rezultate despre simediană, de asemenea și foarte folositor.

Demonstrație: Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și considerăm P și Q intersecțiile dreptelor AB și AC cu cercul de centru X și rază XB.

Observăm că:

∠PBQ = ∠BQC + ∠BAC = $\frac{\angle BDC + \angle BOC}{2}$ = 90°, deci PQ este diametru în cercul de centru X și rază XB și, deci, trece prin X.



$\angle ABC = \angle AQP$ și $\angle ACB = \angle APQ$, obținem că $\Delta ABC \sim \Delta AQP$. Dacă M este mijlocul lui BC, atunci punctele M și X sunt corespunzătoare în triunghiurile asemenea ABC și AQP, de unde $\angle BAM = \angle QAX$, adică AX este simediana triunghiului ABC.

2.a. Observăm o consecință drăguță:

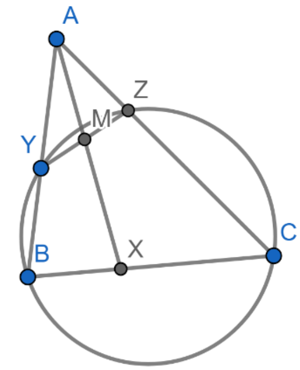
Dacă notăm cu D, E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, atunci **punctul simedian/punctul lui Lemoine** al triunghiului DEF (intersecția simedianelor triunghiului DEF) este **punctul lui Gergonne** al triunghiului ABC (intersecția dreptelor AD, BE și CF).

Consecință 2.a. (Mathematical Reflections) Fie D, E și F punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA și respectiv AB. Atunci, triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă centrele de greutate al triunghiurilor DEF și ABC sunt puncte izogonal conjugate în funcție de triunghiul DEF.

Demonstrație: Este evident că, dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și DEF coincid cu centrul înscris al triunghiului DEF, deci, ca urmare, sunt și izogonal conjugate. Reciproc, din **2.a.** , avem că AD, BE și CF sunt simedianele varfurilor corespunzatoare vârfurilor D, E, F în triunghiul DEF, deci punctul simedian al triunghiului DEF coincide cu punctul lui Gergonne al triunghiului ABC. Punctul simedian al triunghiului DEF este punctul izogonal conjugat centrului de greutate al triunghiului DEF, deci deducem că centrul de greutate al triunghiului ABC coincide cu punctul lui Gergonne al triunghiului ABC, ceea ce asigură faptul că triunghiul ABC este echilateral.

3. Fie triunghiul ABC și punctele Y și Z variabile pe (AB și respectiv (AC astfel încât YZ este antiparalelă la BC. Atunci locul geometric al punctelor M = mijlocul segmentului (YZ) este A-simediana triunghiului ABC.

Demonstrație: Fie X intersecția dintre AM și BC. Din **1.a.** este



că $\frac{XB}{XC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Avem că

$$\frac{XB}{XC} = \frac{[AXB]}{[AXC]} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin XAB}{\sin XAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin MAY}{\sin MAZ}.$$

De asemenea

$$1 = \frac{MY}{MZ} = \frac{[AMY]}{[AMZ]} = \frac{AY}{AZ} \cdot \frac{\sin MAY}{\sin MAZ},$$

deci

$$\frac{\sin MAY}{\sin MAZ} = \frac{AZ}{AY} = \frac{AB}{AC} \ ,$$

unde ultima egalitate are loc întrucât ΔABC~ΔAZY.

Concluzionăm deci că

$$\frac{XB}{XC} = \frac{AB^2}{AC^2} ,$$

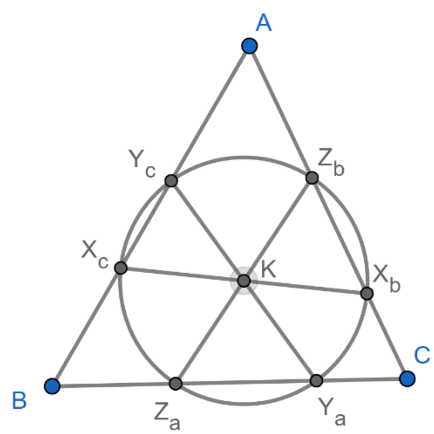
care reprezintă finalul directei.

Reciproca: pentru orice punct M' de pe A-simediana triunghiului ABC, transând Y'Z' antiparalela la BC prin punctul respectiv, din faptul că mijlocul lui Y'Z' se află pe A-simediană, deducem că M' este mijlocul lui (Y'Z').

Demonstrația este deci încheiată.

O consecință foarte drăguță o constituie următorul rezultat care îi aparține lui Lemoine.

Consecință 3. Fie K punctul simedian al triunghiului ABC și x,y și z antiparalele duse prin K la BC, CA și respectiv AB. Punctele determinate de x, y și z cu laturile triunghiului ABC se află pe un cerc cunoscut ca **primul cerc al lui Lemoine**.



Demonstrație: Fie X_b și X_c intersecțiile lui x cu CA, respectiv AB. Similar, fie Y_c și Y_a intersecțiile lui y cu AB, BC și Z_a, Z_b intersecțiile lui z cu BC, CA. Din **3.** , cunoaștem că $KX_b = KX_c$, $KY_c = KY_a$, $KZ_a = KZ_b$. Mai mult de atât, din moment ce y și z sunt antiparalele, avem că $\angle KZ_aY_a = \angle KY_aZ_a = \angle A$. Așadar, $KY_a = KZ_a = KY_c = KZ_b$. De asemenea, putem proceda analog pentru a demonstra că triunghiurile ΔKX_bZ_b și ΔKY_cZ_c, deci putem concluziona că $KZ_a = KY_a = KX_b = KZ_b = KY_c = KX_c$, deci obținem că X_b, X_c, Y_c, Y_a, Z_a, Z_b se află pe același cerc de centru K. Aceasta completează demonstrația.

4. Fie ABC un triunghi și X un punct pe latura BC. Evident, pentru orice punct de pe AX avem

$$\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{d(X,AB)}{d(X,AC)} .$$

Acum, dorim să demonstrăm urmatoarea proprietate:

Pentru orice punct P de pe AX avem că

$$\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{d(X,AB)}{d(X,AC)} = \frac{AB}{AC}$$

dacă și numai dacă AX este A-simediana triunghiului ABC.

Demonstrație: AX este A-simediana triunghiului ABC dacă și numai dacă $\frac{XB}{XC} = \frac{AB^2}{AC^2}$, echivalent cu $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin XAB}{\sin XAC}$.

Însă pentru orice punct P de pe AX știm că

$$\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{d(X,AB)}{d(X,AC)} = \frac{\sin XAB}{\sin XAC} .$$

Așadar, ajungem imediat la concluzia că

$$\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{d(X,AB)}{d(X,AC)} = \frac{AB}{AC} ,$$

dacă și numai dacă AX este A-simediana triunghiului ABC.

Consecință 4. Punctul simedian K al triunghiului ABC este singurul punct din planul triunghiului care este centrul de greutate al propriului triunghi pedal.

Demonstrație: Pentru demonstrația directei, fie D, E și F proiecțiile lui K pe laturile BC, CA, respectiv AB și notăm cu X intersecția lui DK cu EF. Ne propunem să demonstrăm că X este mijlocul lui EF și procedând analog pentru EY și FZ putem concluziona că K este centrul de greutate al triunghiului DEF. Știm că

$$\frac{XE}{XF} = \frac{[KXE]}{[KXF]} = \frac{KE}{KF} \cdot \frac{\sin XKE}{\sin XKF}.$$

Evident că K se află pe A-simediană, deci din **4.**

$$\frac{KE}{KF} = \frac{d(K,AC)}{d(K,AB)} = \frac{AC}{AB}.$$

Mai mult de atât, ∠XKE = ∠C și ∠XKF = ∠B, din moment ce patrulaterele KDCE și KFBD sunt inscriptibile, de unde

$$\frac{KE}{KF} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = 1. \text{ (teorema sinusurilor pentru triunghiul ABC)}$$

Așadar, X este mijlocul lui EF, cee ace constituie finalul demonstrației directe.

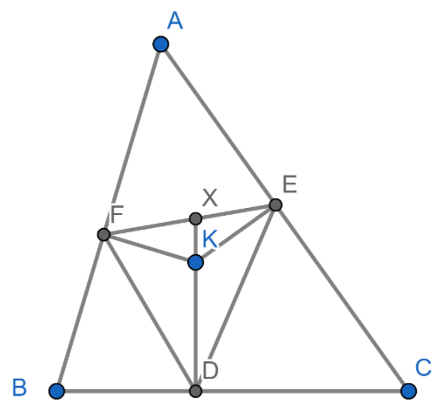
Pentru reciprocă, știm că punctul K cu proiecțiile D, E, F pe laturile triunghiului ABC are proprietatea că

$$1 = \frac{KE}{KF} = \frac{KE}{KF} \cdot \frac{\sin XKE}{\sin XKF}.$$

Însă ∠XKE = ∠C și ∠XKF = ∠B, deci

$$\frac{KE}{KF} = \frac{AC}{AB},$$

ceea ce asigură faptul că K se află pe A-simediana triunghiului ABC și analog se află pe simedianele din B și C, deci este punctul simedian al triunghiului ABC.

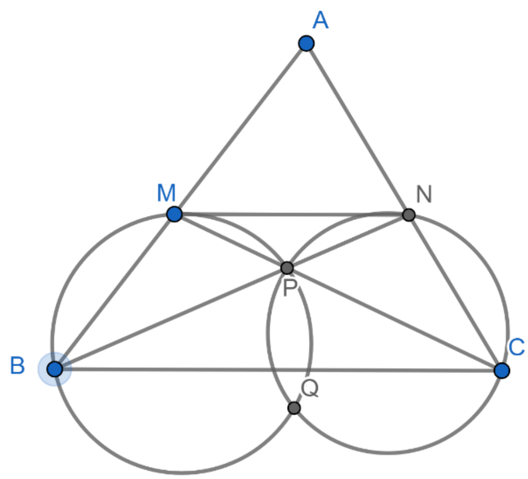


Aplicație 1. (BMO 2009) Fie MN o dreapta paralelă la BC în triunghiul ABC, cu M pe latura AB și N pe AC. Fie P intersecția dintre BN și CM. Cercurile circumscrise triunghiurilor BMP și CNP se intersectează în punctele distincte P și Q. Să se arate că ∠BAQ = ∠CAP.

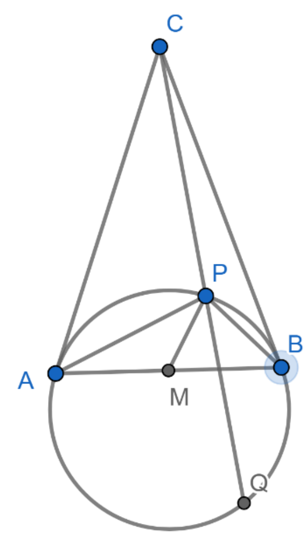
Demonstrație: Considerând T intersecția dintre AP și BC, putem aplica teorema lui Ceva pentru cevienele AT, BN și CM concurente în P, obținând, din Thales, că T este mijlocul laturii (BC). Așadar, AP este A-mediana triunghiului ABC, așa că este suficient să demonstrăm că AQ este A-simediana triunghiului ABC. Din moment ce QBMP și QCNP sunt inscrpitiblie, avem că ∠QBM = ∠QPC = ∠QNC și ∠QMB = ∠QPB = ∠QCN, deci Δ QBM ~ Δ QNC. Totodată, MN ∥ BC, deci

$$\frac{d(Q,AB)}{d(Q;AC)} = \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC},$$

fapt care din **4.** implică faptul că AQ este A-simediana triunghiului ABC, ceea ce ne-am propus.



Aplicație 2. (ONM Polonia 2000) Fie ABC cu AC = BC și P un punct în interiorul triunghiului astfel încât ∠PAB = ∠PBC. Dacă M este mijlocul lui AB, atunci ∠APM + ∠BPC = 180 °.



Demonstrație: Fie ω cercul circumscris triunghiului PAB. Din moment ce ∠PAB = ∠PBC avem că BC este tangentă la ω. Ținând cont că BC = AC, obținem că și CA este tangentă la ω . Fie Q intersecția dintre CP și ω. Din **2.**, PQ este P-simediană în triunghiul PAB, așadar $\angle APM + \angle BPC = \angle BPQ + \angle BPC = 180°$.

Problemă propusă 1. (Ucraina 2000) În triunghiul ABC, punctele M și N sunt mijloacele laturilor (BC), respectiv (CA). Punctul P este interior triunghiului, astfel încât $\angle BAP = \angle PCA = \angle MAC$. Arătați că $\angle PNA = \angle AMB$.

Problemă propusă 2. Fie triunghiul ABC și punctul I, centrul cercului său înscris. Dacă U este mijlocul arcului BAC al cercului circumscris triunghiului ABC, arătați că IU este simediană a triunghiului IBC.

Problemă propusă 3. Punctele C, D, M și A sunt situate pe dreapta l, în această ordine, astfel încât CM = MD. Cercul ω este tangent la dreapta l în punctul A. Fie B punctul diametral opus lui

A în ω. Dacă dreptele BC și BD intersectează a doua oară cercul ω în punctele P și respectiv Q, arătați că dreptele tangente la cercul ω în punctele P și Q și dreapta BM sunt concurente.

Problemă propusă 4. (Dinu Șerbănescu, Mathematical Reflections) Fie ABCD un patrulater convex, astfel încât BC = CD și $2 \cdot \angle A + \angle C = 180°$. Dacă punctul M este mijlocul segmentului BD, arătați că $\angle MAD = \angle BAC$.

Bibliografie

- Yufei Zhao, Three Lemmas in Geometry, http://yufeizhao.com/
- http://artofproblemsolving.com/
- Alexandru Negrescu, Bucuria simedianei, https://ssmr.ro/gazeta/gmb/2013/6/articol.pdf