CAZURILE DE EGALITATE ÎN INEGALITĂŢI

de ANDREI ECKSTEIN

Câmpulung, 20 august 2013

Scopul acestei lecţii este de a vedea cum identificarea unui caz de egalitate ne poate sugera ce estimare să facem, sau, dimpotrivă să nu facem.
Astfel, în inegalitatea

$$\frac{a^2+4b^2}{2b+3c}+\frac{b^2+4c^2}{2c+3a}+\frac{c^2+4a^2}{2a+3b}\ge a+b+c, \qquad (1)$$

poate fi, la o primă vedere, tentant să încercăm o minorare de tipul

$$a^2+4b^2\ge 4ab \qquad (*).$$

Ar fi atunci suficient să demonstrăm inegalitatea

$$\frac{4ab}{2b+3c}+\frac{4bc}{2c+3a}+\frac{4ca}{2a+3b}\ge a+b+c \qquad (2).$$

Însă este uşor de văzut că pentru $a=b=c$ avem egalitate în inegalitatea (1), însă nu şi în inegalitatea $a^2+4b^2\ge 4ab$, care în cazul $a=b=c$ va fi strictă. Astfel este clar că inegalitatea (2), nefiind satisfăcută în cazul $a=b=c$, nu mai este adevărată. În concluzie, încercând să folosim $(*)$ STRICĂM CAZUL DE EGALITATE, deci vom obţine o inegalitate care nu mai este valabilă. Examinând aşadar cazul de egalitate ne ajută să excludem din start unele idei aparent ,,plauzibile”.

La alte inegalităţi, cazul de egalitate ne poate chiar sugera pasul de pornire.
Pentru inegalitatea condiţionată de $a,b,c>0$, $a+b+c=1$,

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad (3),$$

se vede imediat că avem egalitate dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$. Cum putem majora numitorii membrului stâng? Ideea naturală este de a majora radicalul folosind inegalitatea mediilor. Tentativa cu $\sqrt{1-a}=\sqrt{1\cdot(1-a)}\le\frac{1+(1-a)}{2}$ nu este satisfăcută cu egalitate dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$, aşa că trebuie să adaptăm metoda: în cazul de egalitate, avem $1-a=\frac{2}{3}$, aşa încât ne vine ideea să aplicăm inegalitatea mediilor pentru numerele $\frac{2}{3}$ şi $1-a$ (în loc de 1 şi $1-a$). Avem $\sqrt{\frac{2}{3}\cdot(1-a)}\le\frac{\frac{2}{3}+1-a}{2}=\frac{5-3a}{6}$, de unde $\frac{a}{\sqrt{1-a}}\ge\frac{6a}{5-3a}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$. Pentru a demonstra inegalitatea (3) este aşadar suficient să demonstrăm că $\frac{6a}{5-3a}+\frac{6b}{5-3b}+\frac{6c}{5-3c}\ge\frac{3}{2}$, adică, scriind că $5 = 5a+5b+5c$, $\dfrac{a}{2a+5b+5c}+\dfrac{b}{5a+2b+5c}+\dfrac{c}{5a+5c+2c} \geq \dfrac{1}{4}$. Amplificând cele trei fracţii din membrul stâng cu a, b şi respectiv c şi aplicând inegalitatea CBS (forma Bergström), obţinem inegaliatea dorită.

Exemple.

1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive, $a \leq 4$, $b \leq 9$ şi $a+b+c = 49$. Să se arate că

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}} \geq 1.$$

Mircea Lascu

Notând $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$, $\sqrt{c} = z$, avem că $x \leq 2$, $y \leq 3$ şi $x^2+y^2+z^2 = 49$. Inegalitatea de demonstrat revine la $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq 1$. Forma mambrului stâng ne sugerează să considerăm media armonică a numerelor x, y, z. Însă observăm că avem egalitate pentru $x = 2, y = 3, z = 6$, caz pentru care, dacă aplicăm inegalitatea mediilor pentru numerele x, y, z, stricăm cazul de egalitate. Observăm că $3x = 2y = z$, de unde ideea:

$$\frac{6}{\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt{\frac{(3x)^2+(3x)^2+(3x)^2+(2y)^2+(2y)^2+z^2}{6}} =$$

$$\sqrt{\frac{27x^2+8y^2+z^2}{6}} = \sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)+26x^2+7y^2}{6}} \leq \sqrt{\frac{49+26\cdot 4+7\cdot 9}{6}} = 6.$$

2. Fie $a, b, c, d \geq 0$ cu proprietăţile $a \leq 1$, $a+b \leq 5$, $a+b+c \leq 14$, $a+b+c+d \leq 30$. Să se arate că $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leq 10$.

baraj România, 1977

Observăm că cele patru condiţii, dar şi inegalitatea de demonstrat, sunt satisfăcute de $a = 1$, $b = 4$, $c = 9$, $d = 16$. Vom aplica inegalitatea mediilor pentru fiecare radical, având însă grijă să nu stricăm cazul de egalitate.

Astfel, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} = \sqrt{1\cdot a}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot b}+\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{9\cdot c}+\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{16\cdot d} \leq$

$$\frac{1+a}{2}+\frac{4+b}{4}+\frac{9+c}{6}+\frac{16+d}{8} = \frac{12a+6b+4c+3d+120}{24} =$$

$$\frac{3(a+b+c+d)+(a+b+c)+2(a+b)+6a+120}{48} \leq$$

$$\frac{12\cdot 30+14+2\cdot 5+6\cdot 1+120}{24} = 10.$$

Egalitatea, vedem, are loc numai pentru valorile ghicite la început.

3. [1] Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătaţi că

$$(a+b)^2 + (a+b+4c)^2 \geq \frac{100abc}{a+b+c}.$$

baraj Hong Kong, 2001

Nu este uşor de intuit că egalitatea are loc dacă $a = b = 2c$. Apoi, din inegalitatea mediilor, $a+b+c = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + c\right) \geq 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{16}}$. De asemenea, $(a+b)^2+(a+b+4c)^2 = 2(a^2+b^2+8c^2+2ab+4ac+4bc) = 2(a^2+b^2+4c^2+4c^2+ab+ab+2ac+2ac+2bc+2bc) \geq 2 \cdot 10 \cdot \sqrt[10]{(a^2)(b^2)(4c^2)(4c^2)(ab)(ab)(2ac)(2ac)(2bc)(2bc)}$ Înmulţind cu relaţia precedentă obţinem concluzia. Remercaţi aparent ciudata împărţire a termenilor înainte de aplicarea inegalităţii mediilor: scopul a fost să facem termenii egali.

Cazul de egalitate în inegalităţile clasice.

Diferitele inegalităţi clasice au diferite cazuri de egalitate. De exemplu, în inegalitatea mediilor avem egalitate dacă numerele sunt egale; în inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (CBS) avem egalitate dacă a_i-urile sunt proporţionale cu b_i-urile; în inegalitatea rearajamentelor avem egalitate dacă a_i-urile sunt egale sau dacă b_i-urile sunt egale; în inegalitatea lui Schur avem egalitate dacă cele trei variabile sunt egale sau dacă două sunt egale şi cea de-a treia este nulă.

Identificarea cazului de egalitate poate sugera care anume egalitate trebuie aplicată.

1. [1] Fie $S(a, b, c)$ aria unui triunghi care are laturile de lungimi a, b, c. Arătaţi că

$$\sqrt{S(x, y, z)} + \sqrt{S(x', y', z')} \leq \sqrt{S(x + x',\ y + y',\ z + z')}.$$

Intuim uşor că avem egalitate atunci când triunghiurile sunt asemenea, adică atunci când $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$. Deoarece acesta este tocmai cazul de egalitate în inegalitatea CBS, ne gândim că va trebui să aplicăm respectiva inegalitate.

Notăm cu p respectiv p' semiperimetrele $p = \frac{x+y+z}{2}$ şi $p' = \frac{x'+y'+z'}{2}$. Atunci $\frac{(x+x') + (y+y') + (z+z')}{2} = p + p'$.

Cu formula lui Heron, inegalitatea de demonstrat revine la

$$\sqrt[4]{p(p-x)(p-y)(p-z)} + \sqrt[4]{p'(p'-x')(p'-y')(p'-z')} \leq$$

$$\sqrt[4]{(p+p')(p+p'-x-x')(p+p'-y-y')(p+p'-z-z')}.$$

Aplicăm de două ori inegalitatea CBS:

$$\sqrt[4]{p(p-x)(p-y)(p-z)} + \sqrt[4]{p'(p'-x')(p'-y')(p'-z')} \leq$$
$$\sqrt{\left[\sqrt{p(p-x)} + \sqrt{p'(p'-x')}\right] \cdot \left[\sqrt{(p-y)(p-z)} + \sqrt{(p'-y')(p'-z')}\right]} \leq$$
$$\sqrt{\sqrt{(p+p')(p-x+p'-x')} \cdot \sqrt{(p-y+p'-y')(p-z+p'-z')}} =$$
$$\sqrt[4]{(p+p')(p+p'-x-x')(p+p'-y-y')(p+p'-z-z')}.$$

2. Arătaţi că dacă $a, b, c \geq 0$ satisfac $a + b + c = 3$, atunci

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leq \frac{27}{4}.$$

Observăm că avem egalitate dacă două dintre variabile sunt egale cu $\frac{3}{2}$ iar cea de-a treia cu 0. Asta ne duce cu gândul la inegalitatea lui Schur:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b) \geqslant 0, \quad \forall\, a, b, c \geqslant 0,\ r > 0. \qquad (4)$$

Pentru $r = 1$ această inegalitate revine la $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$.
Inegalitatea din enunţ se scrie

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leq \frac{(a+b+c)^3}{4},$$

adică $a^3+b^3+c^3+6abc \geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$, inegalitate care rezultă din (4) şi $3abc \geq 0$.

Aplicaţii.

1. Arătaţi că dacă $x, y, z > 0$ satisfac $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, atunci $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Marian Tetiva, enunţ parţial

2. Dacă $a, b, c \geq 0$ satisfac $a+b+c = 1$, arătaţi că $5(a^2+b^2+c^2) \leq 6(a^3+b^3+c^3)+1$.

Mihai Piticari, Dan Popescu [2]

BIBLIOGRAFIE

[1] http://www.mathdb.org/notes_download/elementary/algebra/ae_A5c.pdf

[2] T. Andreescu, V. Cîrtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu – *Old and New Ineqiualities*, Ed. GIL, 2011