Problema 1
Etapa 4
Clasa a X-a

Problema 1. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $(x+1)\sqrt{x^2+1} = ax$ să admită o singură soluție în intervalul $(0,\infty)$.

Mihai Opincariu, Brad

Soluție:

Împărțind prin x^2, ecuația devine $\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = a\cdot\frac{1}{x}$. Altfel spus, dacă $x \in (0,\infty)$ este soluție, atunci și $\frac{1}{x} \in (0,\infty)$ este soluție. Deoarece ecuația are o singură soluție în intervalul $(0,\infty)$, deducem că $x = \frac{1}{x}$, adică $x=1$ trebuie să fie soluție. Înlocuind în ecuație, obținem $a = 2\sqrt{2}$.

Rămâne ca, pentru $a = 2\sqrt{2}$, să demonstrăm că ecuația admite o singură soluție pozitivă. Ecuația se scrie echivalent $(x+1)^2(x^2+1) = 8x^2$ sau $x^4+2x^3-6x^2+2x+1=0$. După factorizări obținem $(x-1)^2(x^2+4x+1)=0$, ecuație care în mod evident are o singură soluție pozitivă: $x=1$.