Etapa 1, Problema 3

Fie a, b două numere reale nenule şi funcţia

$$f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{ax+b}.$$

Arătaţi că există trei numere reale distincte x_1,x_2,x_3 astfel încât $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_3$ şi $f(x_3)=x_1$ dacă şi numai dacă $a+b^2=0$.

Olimpiadă U.S.A.

Soluţie.

Dacă există trei numere reale distincte x_1,x_2,x_3 astfel încât $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_3$ şi $f(x_3)=x_1$, atunci funcţia $g=f\circ f\circ f$ are cel puţin trei puncte fixe (x_1,x_2 şi x_3). Însă $f(f(f(x)))=\dfrac{abx+(a+b^2)}{a(a+b^2)x+b(2a+b^2)}$, deci funcţia g este omografică, de tipul $\dfrac{mx+n}{px+q}$. Dacă $p\neq 0$, o astfel de funcţie are cel mult două puncte fixe. Dacă $p=0$, atunci funcţia g este liniară şi are mai mult de un punct fix dacă şi numai dacă este funcţia identică. În concluzie, $a(a+b^2)=0$, $\dfrac{ab}{b(2a+b^2)}=1$ şi $\dfrac{a+b^2}{b(2a+b^2)}=0$, relaţii care revin $a+b^2=0$.

Dacă $a+b^2=0$ şi $b\neq 1$, se arată că $x_1=1, x_2=\dfrac{1}{b-b^2}$ şi $x_3=\dfrac{b-1}{b^2}$ sunt trei numere reale distincte pentru care $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_3$ şi $f(x_3)=x_1$. În cazul în care $a=-1, b=1$ putem considera $x_1=2, x_2=-1, x_3=\dfrac{1}{2}$. (De fapt, cum $f\circ f\circ f$ este funcţia identică, aproape orice valoare am da lui x_1, valorile $f(x_1)=x_2$ şi $f(x_2)=x_3$ vor fi convenabile.)