

**Problema 3.** Suma a 21 de numere naturale nenule diferite este egală cu 275. Arătați că cel puțin 7 și cel mult 15 dintre cele 21 de numere sunt impare.

*Traian Preda, București*

**Soluție:** Presupunem că numai 6 dintre numere sunt impare.

Atunci, cea mai mică sumă posibilă este  $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 = 276$

Cum  $S$  este cu 1 mai mare decât 275 rezultă că din unul dintre numerele pare mai mare decât 12 trebuie să scădem 1 (altfel obținem un număr deja existent), deci va deveni număr impar. Așadar, avem cel puțin 7 numere impare.

Presupunem că 16 dintre numere sunt impare.

Atunci, cea mai mică sumă posibilă este  $T = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 286$

Cum  $T$  este cu 11 mai mare decât 275 rezultă că din unul dintre numerele impare mai mare decât 23 trebuie să scădem 11 (altfel obținem un număr deja existent sau scăderea nu este posibilă), deci va deveni număr par. Așadar, avem cel mult 15 numere impare.