P4. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,1)$ un şir de numere pozitive subunitare cu proprietatea că şirul $y_n = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)$ are limita 0. Arătaţi că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\infty$.

S. Fie $z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Deoarece $z_{n+1} = z_n + x_{n+1}, (\forall) n \geq 1$, şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci are o limită $l = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n \in (0,\infty]$.
Să presupunem că $l < \infty$. Atunci $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(z_{n+1}-z_n) = l - l = 0$, astfel că există un rang $n_0 \geq 1$, astfel încât $x_n \in \left(0,\frac{1}{2}\right), (\forall) n > n_0$. Pentru $n > n_0$ avem atunci că $x_n < 1 - x_n$, astfel că

$$x_n > \frac{x_n^2}{1-x_n} = x_n^2 + x_n^3 + \ldots + x_n^k + \ldots = \frac{1}{1-x_n} - 1 - x_n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x_n} - 1\right) > \frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{1}{1-x_n}\right) = -\frac{1}{2}ln(1-x_n).$$

Prin însumare, obţinem atunci

$$z_n - z_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{n} x_k > -\frac{1}{2}ln\left(\prod_{k=n_0+1}^{n}(1-x_k)\right) = -\frac{1}{2}ln\left(\frac{y_n}{y_{n_0}}\right).$$

Rezultă că $l = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n \geq z_{n_0} - \frac{1}{2}\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} ln\left(\frac{y_n}{y_{n_0}}\right) = \infty$, în contradicţie cu presupunerea că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n < \infty$. Prin urmare, această presupunere este greşită, şi obţinem că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = \infty$.