Etapa 7, Problema 4

Fie f o funcţie polinomială polinomială cu coeficienţi întregi, strict crescătoare pe $\mathbb{N}$, cu $f(0) = 1$. Demonstraţi că nu există progresii aritmetice neconstante având termenii numere naturale astfel încât valoarea lui f în fiecare termen al progresiei să fie număr prim.

Mihai Manea

<u>Soluție</u>

Din $f(0)=1 \Rightarrow f(X)=a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X^1 + 1$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$, $a_m \neq 0$.

Întrucât f e strict crescătoare pe $\mathbb{N} \Rightarrow f(p) > f(0) = 1$, $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1 \Rightarrow f(p) \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem prin absurd că există o progresie aritmetică, astfel încât valoarea lui f în fiecare termen al acesteia să fie număr prim.

Deci, $f(\alpha), f(\alpha+r), f(\alpha+2r), f(\alpha+3r), \ldots, f(\alpha+pr), \ldots$ sunt prime, unde $\alpha \in \mathbb{N}^*$, iar $r>0$ este rația progresiei $\Rightarrow f(\alpha+f(\alpha)\cdot r)$ este termen prim.

$$f(\alpha+f(\alpha)r) = a_m(\alpha+f(\alpha)r)^m + a_{m-1}(\alpha+f(\alpha)r)^{m-1} + \ldots +$$
$$+ a_2(\alpha+f(\alpha)r)^2 + a_1(\alpha+f(\alpha)r) + 1 =$$
$$= a_m \cdot \sum_{i=0}^{m} C_m^i \cdot \alpha^{m-i} \cdot r^i \cdot f^i(\alpha) + a_{m-1} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i \alpha^{m-i-1} \cdot r^i \cdot f^i(\alpha) + \ldots +$$
$$+ a_2 \cdot \sum_{i=0}^{2} C_2^i \alpha^{2-i} \cdot r^i \cdot f^i(\alpha) + a_1 \cdot \alpha + a_1 \cdot r \cdot f(\alpha) + 1 =$$

$$= a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} C_n^i \cdot \alpha^{n-i} \cdot r^i \cdot f^i(\alpha) + a_{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \cdot \alpha^{n-i-1} \cdot r^i \cdot f^i(\alpha) + \dots$$

$$\dots + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{2} C_2^i \cdot \alpha^{2-i} \cdot r^i \cdot f^i(\alpha) + a_1 \cdot r \cdot f(\alpha) +$$

$$+ \left[a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \alpha + 1\right].$$

Observăm că numărul din paranteza pătrată este chiar $f(\alpha)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(\alpha) \mid f(\alpha + f(\alpha) r) \\ \text{dar } f(\alpha) \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(\alpha + f(\alpha) r)$ nu este prim. Contradicție.

Presupunerea făcută este falsă, prin urmare nu există nicio progresie aritmetică neconstantă având termenii numere naturale, astfel încât valoarea lui f în fiecare termen al progresiei să fie număr prim.