Problema 4. Determinaţi toate tripletele de numere naturale nenule (x, y, z) care satisfac egalitatea

$$x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!.$$

* * *

Soluţie:
Evident, membrul drept este mai mare decât $x!$ şi $y!$, deci $z > x$ şi $z > y$.
Atunci trebuie ca fiecare din numerele $x \cdot y!$, $2y \cdot x!$ şi $z!$ să fie divizibil şi cu $x!$ şi cu $y!$.
Din faptul că $x \cdot y!$ este divizibil cu $x!$ rezultă că $y!$ este divizibil cu $(x-1)!$, adică $y \geq x-1$.
Similar, din $2y \cdot x!$ divizibil cu $y!$ rezultă că $2 \cdot x!$ este divizibil cu $(y-1)!$. Dacă $y-1 > x$, atunci $y-2 \geq x$, deci $(y-1)! = (y-2)! \cdot (y-1) \geq x! \cdot (y-1) \geq 2 \cdot x!$ dacă $y \geq 3$, cu egalitate numai dacă $y = 3$ şi $x = 1$.
În celelalte cazuri rezultă că $y - 1 \leq x \leq y + 1$. Aşadar avem de tratat cazurile:
I. $y = 1$, **II.** $y = 2$, **III.** $y = 3$ şi $x = 1$, **IV.** celelalte cazuri.
• $y = 1$ implică $x = 1$ sau $x = 2$. Obţinem soluţia $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.
• $y = 2$ implică $x \in \{1, 2, 3\}$. Obţinem soluţia $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
• $y = 3$ implică $x = 1$ care nu convine.
• În cazurile rămase avem $y \in \{x-1,\ x,\ x+1\}$. Dacă $y = x$ atunci ecuaţia devine $3x \cdot x! = z!$. Membrul drept este însă divizibil cu $(x+1)!$ (căci $z \geq x+1$), dar membrul stâng nu. Dacă $y = x-1$, ecuaţia devine $(2y+1) \cdot (y+1)! = z!$. Membrul drept este divizibil cu $(y+2)!$ (deoarece trebuie ca $z > y+1$), dar membrul nu este divizibil cu $(y+2)!$. Rămâne că $y = x+1$. În acest caz ecuaţia revine la $(x+2)! = z!$, deci la $z = x+2$.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $(2, 1, 3)$ şi $(n,\ n+1,\ n+2)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar.