Problema 3

Determinați numerele naturale n mai mari decât 1 care au proprietatea că, dacă

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_s$$

sunt toți divizorii săi, atunci numerele

$$S_i = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_i^2$$

sunt prime pentru orice $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$.

Soluție:

Dacă $s = 2$, adică $n = p$ este număr prim atunci, din ipoteză, numărul $S_2 = d_1^2 + d_2^2 = 1 + p$ este prim, de unde obținem $p = 2$, caz în care suma $S_2 = d_1^2 + d_2^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ este număr prim (pentru $p \geq 3$, prim și impar, ar rezulta că numărul $S_2 = 1 + p^2 \geq 1 + 3^2 = 10$ este par, deci compus, fals).
Prin urmare $n = 2$ e soluție.
Arătăm că, pentru $s \geq 3$, nu avem alte soluții.
Numărul n nu poate fi impar, căci ar rezulta că $d_1 = 1$, $d_2 \geq 3$ e impar și atunci suma
$S_2 = 1 + d_2 \geq 1 + 3 = 10$ ar fi număr par, mai mare sau egal cu 10, deci număr compus, fals.
Prin urmare n este par și compus, adică $d_1 = 1$, $d_2 = 2$.
a) Dacă $d_3 \geq 3$ ar fi impar, atunci ar rezulta că suma $S_3 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 5 + d_3^2 \geq 5 + 3 = 14$ este număr par, mai mare sau egal cu 14, deci număr compus, contradicție.
b) Dacă $d_3 = 4$ atunci $S_3 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 21$, compus, fals.
c) Dacă $d_3 \geq 6$ este par, rezultă $d_3 = 2k$, cu $k \in N$, $k \geq 3$ și evident k / n, $k < d_3$, ceea ce ar conduce la $k = d_2 = 2$, contradicție.
În concluzie singura soluție este $n = 2$.