COMENTARII FAZA LOCALĂ 2012, BUCUREŞTI

Abstract. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2012, Bucharest.
Data: 19 februarie 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2012, Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a IX-a

Subiectul (1)**.** *Se consideră mulţimile* $M = \{1, 2, \ldots, 2012\}$, $A = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap M$, $B = \{3x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap M$, $C = \{5x + 4 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap M$.

a) Determinaţi numărul ~~elementelor mulţimilor~~ elementelor fiecăreia dintre mulţimile A, B *şi* C.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A \cap B \cap C$.

M. Perianu

Soluţie. Desigur, problema nu trebuia semnată.

Se vede cu uşurinţă că $A + 1 = 2\mathbb{N}^* \cap (M + 1)$, $B + 1 = 3\mathbb{N}^* \cap (M + 1)$, $C + 1 = 5\mathbb{N}^* \cap (M + 1)$, şi $(A \cap B \cap C) + 1 = 30\mathbb{N}^* \cap (M + 1)$, de unde $|A| = 1006$, $|B| = 671$, $|C| = 401$, $|A \cap B \cap C| = 67$. $\square$

Subiectul (2)**.** *Pentru fiecare număr natural* $n \geq 2$ *se consideră numărul*

$$E(n) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \sqrt{\frac{1}{(n-2)^2} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + 1}}} \quad (n - 1 \textit{ semne radical}).$$

Arătaţi că $\lfloor nE(n) \rfloor = n$ *pentru orice număr natural* $n \geq 2$.

F. Dumitrel

[1]Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate.

Soluţie. Se cere deci a demonstra că $n \leq nE(n) < n+1$. Prima inegalitate este trivială (strict), căci sub fiecare radical se află un număr supraunitar.

Faptul că $nE(n) < n+1$ este imediat demonstrat prin inducţie, căci $2E(2) = 2\sqrt{2} < 2+1 = 3$, iar $(n+1)E(n+1) = (n+1)\sqrt{\dfrac{1}{n^2} + E(n)} < \dfrac{n+1}{n}\sqrt{1+n(n+1)} < n+2$ revine la $3n+1 < n^3$, adevărat pentru $n \geq 2$.

Această problemă a fost în mod clar mai dificilă pentru concurenţi decât problema 4, deci a fost prost plasată în ordinea subiectelor de la clasă. □

Subiectul (4)**.** *Numerele reale x, y, z, t verifică relaţiile $x+y+z+t = 0$ şi $x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$. Arătaţi că $-1 \leq xy+yz+zt+tx \leq 0$.*

* * *

Soluţie. Avem $x+z = -(y+t)$, şi $xy+yz+zt+tx = (x+z)(y+t) = -(x+z)^2 \leq 0$. Pe de altă parte, $(xy+yz+zt+tx)+1 = (xy+yz+zt+tx)+(x^2+y^2+z^2+t^2) = \dfrac{1}{2}\left((x+y)^2+(y+z)^2+(z+t)^2+(t+x)^2\right) \geq 0$. □

Subiectele clasei a IX-a au fost deosebit de uşoare, de nivelul unei teze medii; mai mult – din păcate – de o banalitate descurajantă.

3. Clasa a X-a

Subiectul (1)**.** *Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale pozitive, ecuaţia* $x^{x^{10}} = 10$.

M. Perianu

Soluţie. Avem $x^{10}\lg x = 1$, deci $\lg x > 0$, şi $x > 1$. Funcţia $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^{10}\lg x$ este strict crescătoare (ca produs de funcţii strict crescătoare), şi cum $\sqrt[10]{10}$ este o soluţie, rezultă şi că este unica soluţie. □

Subiectul (2)**.** *Fie x un număr real, şi numerele reale $a, b, c \in (0,\infty)$ astfel încât $a^x + b^x + c^x = a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}$. Arătaţi că $a^{2x+3}+b^{2x+3}+c^{2x+3} \geq 9$.*

M. Chirciu

Soluţie. Avem $a^{2x+3}+b^{2x+3}+c^{2x+3} \geq 3a^{2x/3+1}b^{2x/3+1}c^{2x/3+1}$ (inegalitatea mediilor), şi $3a^{2x/3+1}b^{2x/3+1}c^{2x/3+1} = 3\dfrac{a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}}{a^{x/3}b^{x/3}c^{x/3}} \geq 9\dfrac{a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}}{a^x+b^x+c^x} = 9$ (din nou inegalitatea mediilor). □

Subiectul (3)**.** *Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f\left(f(x)^3\right) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f este bijectivă, şi că $f(f(x)) = \sqrt[3]{x}$.*

* * *

Soluţie. Funcţia f este injectivă căci pentru $f(x_1) = f(x_2)$ avem $x_1 = f\left(f(x_1)^3\right) = f\left(f(x_2)^3\right) = x_2$; şi este surjectivă căci $f\left(x = f(y)^3\right) = y$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$.

Acum, $f\left(f(f(x))^3\right) = f(x)$, deci $f(f(x))^3 = x$, aşadar $f(f(x)) = \sqrt[3]{x}$. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră numerele complexe* $z_1, z_2, \dots, z_{100}$ *având proprietatea că* $z_k z_{k+1} - 2z_k + 4 = 0$ *pentru orice* $k \in \{1, 2, \dots, 99\}$.

a) Arătaţi că $z_1 z_2 \cdots z_{99}$ *este număr întreg negativ.*

b) Calculaţi suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{4 + 2|z_k| + |z_k z_{k+1}|}$.

M. Perianu

Soluţie. Avem $z_{k+1} = \dfrac{2z_k - 4}{z_k}$. Considerând funcţia $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus \{2\}$ definită prin $f(z) = \dfrac{2z-4}{z}$, avem deci $z_{k+1} = f(z_k)$. Dar funcţia $f(z)$ are ca iterate $f(f(z)) = \dfrac{-8}{2z-4}$ şi $f(f(f(z))) = z$.

a) Atunci $z_1 z_2 \cdots z_{99} = (z_1 f(z_1) f(f(z_1)))^{33} = \left(z_1 \dfrac{2z_1 - 4}{z_1} \dfrac{-8}{2z_1 - 4} \right)^{33}$, care revine la -8^{33}.

b) Avem deci $zf(z)f(f(z)) = -8$. Cu $a = \dfrac{|z|}{2}$, $b = \dfrac{|f(z)|}{2}$, $c = \dfrac{|f(f(z))|}{2}$, avem atunci $abc = 1$, şi cunoscuta identitate (**Stelele Matematicii 2011** a prezentat ca problema 1 pentru juniori o variantă ceva mai taxantă)

$$E(a,b,c) = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1,$$

căci $a(1+b+bc) = 1+a+ab$ şi $b(1+c+ca) = 1+b+bc$. Aşadar $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{4+2|z_k|+|z_k z_{k+1}|} = \frac{33}{4} E\left(\frac{|z_1|}{2}, \frac{|f(z_1)|}{2}, \frac{|f(f(z_1))|}{2} \right) = \frac{33}{4}$. $\square$

O funcţie $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, dată prin $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, se numeşte **transformare Möbius**, sau funcţie **(h)omografică**. Ea este univoc asociată (până la înmulţirea cu un scalar complex nenul λ) unei matrice ne-singulare $\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, deci având $\det \mathfrak{h} = ad - bc \neq 0$. Deoarece în cazul nostru vom putea alege $\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, avem $\det \mathfrak{h} = ad - bc = 1$ şi $\operatorname{tr} \mathfrak{h} = a + d = 1$, şi atunci transformarea este clasificată drept *eliptică*; ea este conjugată cu $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, unde $\alpha = \pi/3$, căci $\mathfrak{h}^3 = -I_2$. Orice transformare de ordin finit este eliptică.

Nici subiectele clasei a X-a nu au fost prea dificile; primele trei se fac toate în 1/2 oră, iar a patra este o glumă folosind o identitate folclorică într-un pretins context de numere complexe.

4. Clasa a XI-a

Subiectul (4)**.** *Fie $n \geq 2$ un număr natural, şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nenulă cu $\det(A) = 0$.*

Demonstraţi că $A + A^* = tr(A)I_n$ dacă şi numai dacă $n = 2$.

N. Bourbăcuţ

Soluţie. Dacă $n = 2$, atunci $A + A^* = \mathrm{tr}(A)I_n$ pentru **orice** matrice A, căci dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, şi deci $A + A^* = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (a+d)I_2 = \mathrm{tr}(A)I_2$.

Dacă $A + A^* = \mathrm{tr}(A)I_n$, atunci $A^2 + AA^* = \mathrm{tr}(A)A$, deci $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$, căci $AA^* = \det(A)I_n = 0_n$.

Dacă $\mathrm{tr}(A) = 0$, atunci $A^* = -A \neq 0_n$. Rezultă că $n - 2 < \mathrm{rang}(A) < n$, deci $\mathrm{rang}(A) = n - 1$. Cum $AA^* = 0_n$, şi deci $0 = \mathrm{rang}(AA^*) \geq \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(A^*) - n = \mathrm{rang}(A^*) - 1$, rezultă $\mathrm{rang}(A^*) = 1$. Dar avem şi $\mathrm{rang}(A^*) = \mathrm{rang}(-A) = \mathrm{rang}(A) = n - 1$, de unde $n - 1 = 1$ şi deci $n = 2$.

Dacă $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, aceasta înseamnă că $\mathrm{tr}(A)$ este singura valoare proprie nenulă a lui A, şi deci $\mathrm{rang}(A) = 1$. Dar dacă am avea $A^* = 0_n$, ar rezulta $A = \mathrm{tr}(A)I_n$, deci $\mathrm{tr}(A) = n\mathrm{tr}(A)$, absurd, căci $n > 1$. Prin urmare avem $A^* \neq 0_n$. Rezultă, ca mai sus, $\mathrm{rang}(A) = n - 1$, şi atunci $n - 1 = 1$, deci $n = 2$.

Ambele cazuri tratate mai sus pot într-adevăr să se întâmple.

Soluţia de mai sus a fost elaborată după o discuţie cu Marian Andronache, soluţia oficială trecând puţin cam prea repede peste unele implicaţii. □

5. Clasa a XII-a

Subiectul (2)**.** *a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_5$ ecuaţia $x^3 = a^2$, unde $a \in \mathbb{Z}_5$.*

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $(G, \cdot)$ un grup cu $3n + 1$ elemente. Arătaţi că, pentru orice $a \in G$, ecuaţia $x^3 = a^2$ are exact o soluţie.

C. Chiteş şi B. Năstăsescu

Soluţie. a) Ecuaţia $x^3 = 0$ are evident singura soluţie $x = 0$ în $\mathbb{Z}_5$; mai mult, $x = 0$ nu este soluţie pentru nicio ecuaţie $x^3 = \alpha$, unde $\alpha \neq 0$. Cum $\mathbb{Z}_5^*$ are $4 = 3 \cdot 1 + 1$ elemente, răspunsul de la punctul b) va rezolva şi ceea ce rămâne din punctul a). Din păcate, soluţia oficială conţine o eroare grosolană, care nefiind corectată înainte de postarea soluţiilor, trebuie relevată. Se ajunge la $x^6 = y^6$, de unde se conchide $x = x^6 = y^6 = y$, ceea ce este evident fals; corect ar fi $x^2 = x^6 = y^6 = y^2$, cu o continuare care să ajungă la $x = y$.

b) Valoarea $|G| = 3n + 1$ şi forma $x^3 = a^2$ nu sunt decât ceea ce, într-un jargon stabilit, se numeşte un red herring. Cea mai generală afirmaţie adevărată este că dacă G este finit, şi $(m, |G|) = 1$, atunci ecuaţia $x^m = \alpha$ are soluţie unică, pentru orice $\alpha \in G$.

Pentru aceasta, din relaţia lui Bézout există doi întregi u, v, aşa încât să putem scrie $1 = um + v|G|$. Fie funcţia $f\colon G \to G$ dată prin $f(x) = x^m$. Presupunând $x^m = f(x) = f(y) = y^m$, avem atunci $x = y$, căci vom avea $x^{|G|} = y^{|G|} = e$ şi

$$x^{um+v|G|} = (x^m)^u (x^{|G|})^v = (x^m)^u = (y^m)^u = (y^m)^u (y^{|G|})^v = y^{um+v|G|},$$

deci f este injectivă, şi cum G este finit, atunci f este şi surjectivă.

Ador aceste probleme, unde se cere mult mai puţin decât se poate, cu un minim efort suplimentar, obţine ... brrr! □

Subiectul (2)**.** *Fie $m \in (0,1)$. Vom spune că o funcţie $f\colon [0,1] \to [0,1]$ are media m dacă este integrabilă pe $[0,1]$ şi $\int_0^1 f(x)\,dx = m$.*

a) Arătaţi că mulţimea funcţiilor care au media m este infinită.

b) Arătaţi că, dacă $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare şi f este o funcţie cu media m, atunci

$$\int_0^m g(x)\,dx \le \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \le \int_{1-m}^1 g(x)\,dx.$$

N. Bourbăcuţ

Soluţie. a) Fie $0 < \nu < \min\{m, 1-m\}$ şi $n \in \mathbb{N}$ arbitrare. Putem lua $f(x) = m + \nu \sin 2n\pi x$.

b) În condiţiile date avem $\int_m^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \ge g(m)\int_m^1 f(x)\mathrm{d}x$. Dar avem şi $\int_0^m (1-f(x))g(x)\mathrm{d}x \le g(m)\int_0^m (1-f(x))\mathrm{d}x = g(m)\int_m^1 f(x)\mathrm{d}x$, de unde $\int_m^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^m (1-f(x))g(x)\mathrm{d}x$, ceea ce reprezintă prima inegalitate cerută. Cealaltă se demonstrează în mod analog. □

6. Încheiere

Perfecţiunea nu poate fi niciodată atinsă, se pare, şi numai un nebun utopic, un *don Quixote* ca mine, mai poate crede în realizarea ei. Dar olimpiada ar trebui fi pregătită mult mai din timp, cu problemele circulând între specialişti competenţi, care vor fi avut suficient timp la dispoziţie pentru a descoperi eventualele defecte, şi a crea o probă balansată şi relevantă. Subiectele au fost *curăţele*, şi una peste alta, selecţia pentru etapa următoare nu cred că a lăsat pe dinafară copii cu adevărat valoroşi.