Problemă. Numerele naturale mai mici decât 1000 sunt colorate cu roşu sau cu albastru. Se ştie că dacă un număr x este roşu, atunci şi numărul $x+4$ este tot roşu, iar dacă un număr y este albastru, atunci şi numărul $y+6$ este tot albastru. Arătaţi că numerele x şi $x+2$ sunt colorate la fel.

$* * *$

Soluţie.
Presupunem că numerele x şi $x+2$ sunt colorate diferit.

I. x este roşu şi $x+2$ este albastru.

Dacă $x \leq 992$ ne uităm la culoarea lui $x+8$.
(Putem vorbi de „culoarea lui $x+8$" deoarece $x+8 \leq 1000$.)
Dacă x este roşu, atunci din ipoteză, $x+4$ este roşu şi deci $x+8$ este roşu.

Dacă $x+2$ este albastru, atunci din ipoteză, $x+2+6$, adică $x+8$ este albastru.

Cum fiecare număr are o singură culoare deducem că această posibilitate este exclusă.

Dacă $x > 992$ ne uităm la culoarea numărului $x-6$. Dacă aceasta ar fi roşie atunci $x-2$ şi apoi $x+2$ ar fi şi ele roşii, ceea ce este fals. Dacă $x-6$ ar fi albastru atunci şi x este albastru, ceea ce iarăşi este fals.

II. x este albastru şi $x+2$ este roşu.

Dacă $x \leq 994$ ne uităm la culoarea lui $x+6$.
(Putem vorbi de „culoarea lui $x+6$" deoarece $x+6 \leq 1000$.)
Dacă x este albastru, atunci din ipoteză, $x+6$ este albastru.

Dacă $x+2$ este roşu, atunci din ipoteză, $x+2+4$, adică $x+6$ este roşu.

Cum fiecare număr are o singură culoare deducem că şi această posibilitate este exclusă.

Dacă $x > 994$ ne uităm la culoarea numărului $x-4$.

Dacă aceasta ar fi roşie atunci x ar fi şi el roşu, ceea ce este fals. Dacă $x-4$ ar fi albastru atunci şi $x+2$ este albastru, ceea ce iarăşi este fals.

În concluzie, x şi $x+2$ au aceeaşi culoare.