

P4. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ o matrice care nu comută cu toate matricele din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $4 \det(A) = (\operatorname{tr}(A))^2$.

b) pentru orice matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care comută cu A , numărul $\det(A^2 + B^2)$ este un pătrat perfect.