Problema 2. Se consideră $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Demonstraţi că $\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$.

*****

Soluţie. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{a}} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{b}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c}} \qquad (1)$$

Notând $1 - \frac{1}{a} = x$, $1 - \frac{1}{b} = y$ şi $1 - \frac{1}{c} = z$, deducem că $x, y, z \in (0, 1)$ cu $x + y + z = 1$ şi $a = \frac{1}{y+z}$, $b = \frac{1}{z+x}$, $c = \frac{1}{x+y}$. Inegalitatea (1) devine

$$\sqrt{\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}} \geq \sqrt{\frac{1}{y+z}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{z+x}} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{\frac{1}{x+y}} \cdot \sqrt{z},$$

iar aceasta poate fi scrisă sub forma

$$\sqrt{\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}} \cdot \sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{\frac{1}{y+z}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{z+x}} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{\frac{1}{x+y}} \cdot \sqrt{z},$$

care este adevărată deoarece se obţine direct din inegalitatea C-B-S, scrisă pentru tripletele de numere $\left(\sqrt{\frac{1}{y+z}}, \sqrt{\frac{1}{z+x}}, \sqrt{\frac{1}{x+y}}\right)$ şi $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$.