Problema 4. Un număr natural n se numeşte *fidel* dacă există numerele naturale $a < b < c$ astfel încât $a \mid b$, $b \mid c$ şi $a + b + c = n$.
a) Demonstraţi că există un număr finit de numere naturale care nu sunt fidele.
b) Aflaţi suma tuturor numerelor naturale care nu sunt fidele.

Olimpiadă India, 2011

Soluţie: (*Dan Schwarz*, pe AoPS)
Dacă n este impar, atunci n se scrie $n = 2k + 1 = 1 + 2 + 2(k - 1)$, deci este fidel dacă $k \geq 3$.
$2^4 = 16$ este fidel deoarece $16 = 1 + 3 + 12 = 1 + 5 + 10$.
Dacă n este fidel, atunci, evident, orice multiplu al lui n este fidel; putem scrie $mn = m(a + b + c) = ma + mb + mc$.

Prin urmare, singurele numere care ar putea să nu fie fidele sunt $n = 0$ şi cele de forma $n = 2^\ell(2k + 1)$, cu $\ell = 0, 1, 2$ şi $k = 0, 1, 2$, adică

$$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20, 24, 40\}.$$

Deoarece $10 = 1 + 3 + 6$ este fidel, rezultă că la fel sunt şi 20 şi 40. Dat fiind că un număr fidel $n = a + b + c \geq 1 + 2 + 4 = 7$, rezultă că $1, 2, 3, 4, 5, 6$ nu sunt fidele. Mai rămân în dubiu doar numerele $8, 12$ şi 24, pentru care o simplă verificare arată că nu sunt fidele.
În concluzie, suma numerelor care nu sunt fidele este $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 12 + 24 = 65$.