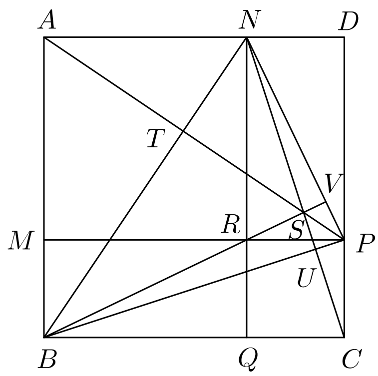
Pe laturile AB şi respectiv AD ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M şi N astfel încât $AM = AN$. Paralela prin M la AD intersectează latura CD în punctul P, iar paralela prin N la AB intersectează latura BC în punctul Q. Dacă notăm cu R punctul de intersecţie a dreptelor MP şi NQ, iar cu S punctul de intersecţie a dreptelor AP şi NC, arătaţi că punctele B, R şi S sunt coliniare.

* * *

Soluţia 1.



Fie $\{T\} = AP \cap BN$ şi $\{U\} = BP \cap CN$.
Deoarece $\Delta\, ABN \equiv \Delta\, DAP$ (C.C.), rezultă că $m(\angle ANB) = m(\angle DPA) = 90^\circ - m(\angle DAP)$, de unde $AP \perp BN$. Analog, din congruenţa triunghiurilor $\Delta\, BCP$ şi $\Delta\, CDN$ rezultă că $BP \perp CN$. Atunci în triunghiul $\Delta\, BNP$ PT şi NU sunt înălţimi, deci S este ortocentrul triunghiului BNP, de unde $BS \perp NP$.
În continuare vom arăta că şi $BR \perp NP$. Va rezulta atunci că punctele S şi R sunt pe perpendiculara dusă din B pe NP, deci că punctele B, R, S sunt coliniare.
Ducem $RV \perp NP$, $V \in NP$. Din congruenţa triunghiurilor $\Delta\, BMR$ şi $\Delta\, PRN$ (C.C.) rezultă că $m(\angle NRV) = 90^\circ - m(\angle RNP) = 90^\circ - m(\angle BRM)$ şi, cum $m(\angle MRN) = 90^\circ$, rezultă că unghiul BRV este alungit, adică B, R, V sunt coliniare, deci $BR \perp NP$, de unde, aşa cum am văzut, rezultă concluzia.

Soluţia 2. (de fapt aceeaşi cu cea de mai sus dar în alţi termeni)[1]
În figură se văd trei perechi de dreptunghiuri congruente care se obţin unele din altele printr-o rotaţie de 90°: $MPDA$ şi $QNAB$, $BCPM$ şi $CDNQ$, precum şi $PDNR$ şi $BQRM$. Din acest motiv diagonalele omoloage sunt perpendiculare, adică $PA \perp BN$, $BP \perp CN$ şi $BR \perp NP$. Rezultă că S este ortocentrul triunghiului BNP, deci aparţine înălţimii BR, adică punctele B, R, S sunt coliniare.

[1] Problema a fost dată în decembrie 2008 la concursul prin corespondenţă al revistei KöMaL (Ungaria). Această soluţie este soluţia oficială dată acolo.