Problema 2

Se consideră pătratul $ABCD$ și numărul real $k \in (0,\infty)\setminus\{1\}$. Considerăm punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$. Notăm cu P intersecția dreptelor MD și AN. Fie Q mijlocul segmentului $[MN]$, iar R intersecția lui DN cu perpendiculara în B pe BQ.

Demonstrați că punctele P, Q și R sunt coliniare.

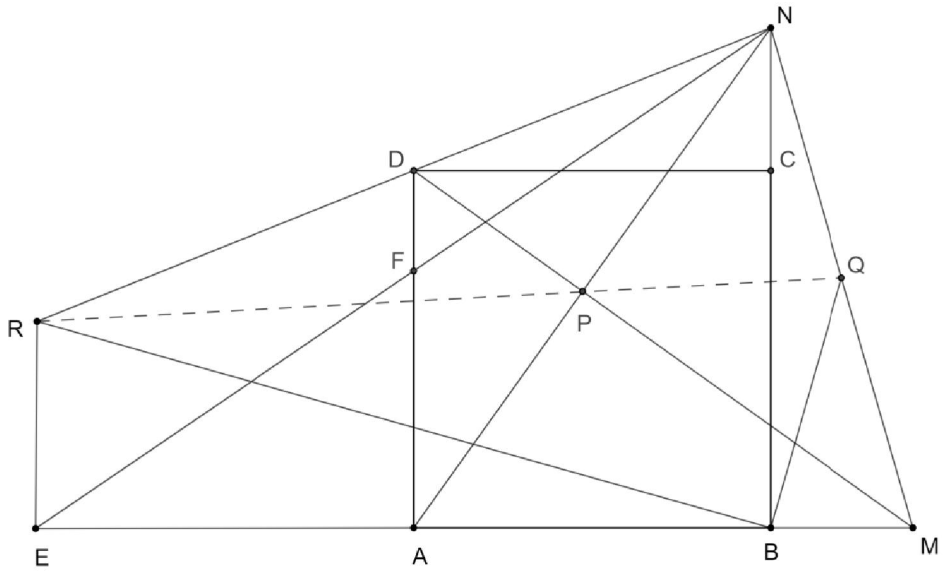
Petru Braica și Marius Mâinea

Soluție: **Cazul 1** $k \in (1,\infty)$

Cum $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$ și $k > 1$ rezultă $B \in (AM)$, $C \in (BN)$ și $AM = BN$.

Atunci: $\triangle DAM \equiv \triangle ABN \Rightarrow \sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle BNA \Rightarrow AN \perp DM$.

Aplicând teorema catetei în $\triangle AMD$ rezultă $AD^2 = DP \cdot DM$ și $AM^2 = MP \cdot DM$. Împărțind aceste două relații obținem $\dfrac{DP}{MP} = \left(\dfrac{AD}{AM}\right)^2$ $\quad(1)$



Fie E proiecția lui R pe dreapta AB, iar F intersecția dintre dreptele AD și EN.

$ER \parallel AD \parallel BN \Rightarrow \dfrac{DF}{RE} = \dfrac{FN}{EN} = \dfrac{AB}{EB} \Rightarrow \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{RE}{EB}$ $\quad(2)$

$[BQ]$ este mediană în triunghiul dreptunghic MBN, deci $BQ=QN$; rezultă $\sphericalangle QNB \equiv \sphericalangle NBQ$.

Dar $\sphericalangle RBE \equiv \sphericalangle NBQ$ (au același complement și anume $\sphericalangle RBN$), deci $\sphericalangle RBE \equiv \sphericalangle QNB$.

Deducem că $\triangle BER \sim \triangle NBM$, deci $\dfrac{RE}{MB} = \dfrac{EB}{BN} \Rightarrow \dfrac{RE}{EB} = \dfrac{MB}{BN} \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{MB}{BN} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB - DF}{AB} = \dfrac{BN - MB}{BN} \Rightarrow \dfrac{FA}{AB} = \dfrac{BC}{BN} \Rightarrow \dfrac{FA}{BN} = \left(\dfrac{AB}{BN}\right)^2$ $\quad(3)$

Din relațiile (1) și (3) rezultă $\dfrac{DP}{MP} = \dfrac{FA}{BN}$. Dar $ER \parallel AD \parallel BN \Rightarrow \dfrac{FA}{BN} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{RD}{RN} \Rightarrow$

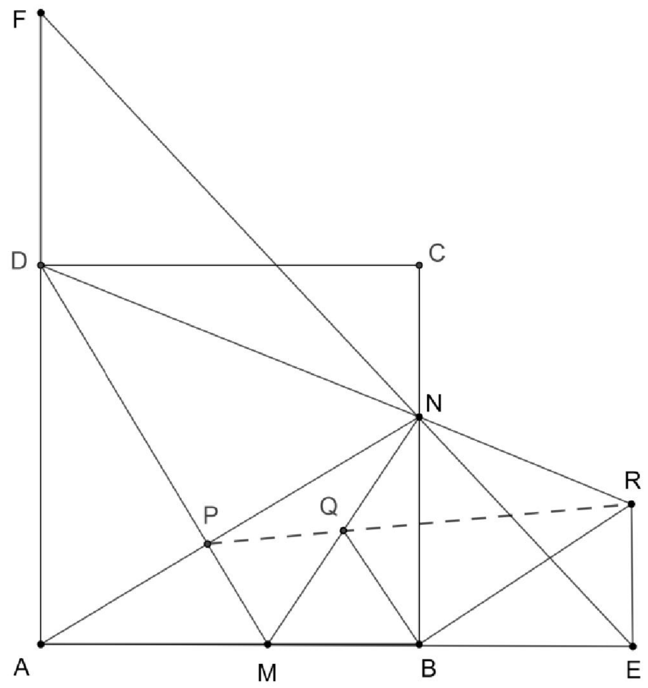
$\Rightarrow \dfrac{DP}{MP} = \dfrac{RD}{RN} \Rightarrow \dfrac{MP}{DP} \cdot \dfrac{RD}{RN} = 1 \Rightarrow \dfrac{QN}{QM} \cdot \dfrac{MP}{DP} \cdot \dfrac{RD}{RN} = 1.$

Din reciproca teoremei lui Menelaus în $\triangle MND$ rezultă că punctele P, Q și R sunt coliniare.

Cazul 2 $k \in (0, 1)$ se tratează în mod analog.

Cum $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$ și $k \in (0, 1)$ rezultă $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ și $AM = BN$.

Figura se schimbă puțin, dar raționamentul este același.



BAREM: Se acordă punctajul maxim pentru tratarea completă a oricăruia dintre cele două cazuri.

Demonsrează $AN \perp DM$ .... 1 punct
Obține relația (1) .... 2 puncte
Obține relația (2) .... 1 punct
Obține relația (3) .... 2 puncte
Finalizare .... 1 punct