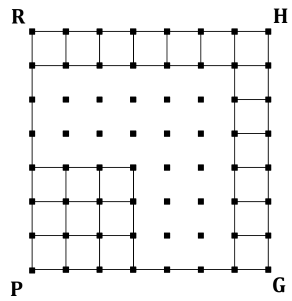
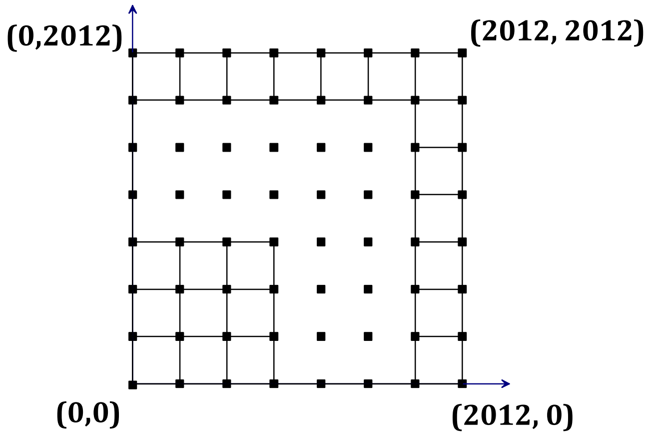
Problema 4. *Doi luptători kung-fu Pai şi Hai se provoacă la o luptă pe butuci. Punctele din figura alăturată reprezintă distribuţia butucilor. Pe fiecare linie şi coloană sunt 2013 butuci. Iniţial Hai se află în punctul H, iar Pai în punctul P. La fiecare semnal al unui arbitru, ales de comun acord, fiecare luptător sare pe butucul vecin astfel: Pai sare spre nord sau est, iar Hai sare spre sud sau vest. Care este probabilitatea ca aceşti luptători să se întâlnească pe unul dintre butuci?*



Prelucrare după M. Klamkin & A. Liu

Soluţie: Folosim următorul sistem de coordonate.



Dacă Pai se află în punctul (p,r) atunci la următorul pas se va afla în punctul $(p,r+1)$ sau $(p+1,r)$. Dacă Hai se află în punctul (h,k) , la următorul pas se va afla în punctul $(h-1,k)$ sau $(h,k-1)$. Aceasta demonstrează că suma coordonatelor celor doi, în orice moment, rămâne aceeaşi, deci egală cu cea iniţială, adică 4024. Prin urmare cei doi se vor întâlni într-un punct $I(i,2012-i)$. Numărul de drumuri posibile pentru Pai din punctul $(0,0)$ la punctul I este C_{2012}^{i}, iar numărul drumurilor posibile pentru Hai din punctul $(2012, 2012)$ la punctul I este C_{2012}^{2012-i}.

Atunci numărul de posibilităţi de întâlnire este $\sum_{i=0}^{2012} C_{2012}^{i} C_{2012}^{2012-i} = C_{4024}^{2012}$.

Dar orice drum al lui Pai începe în punctul $(0,0)$ şi se finalizează într-un punct de forma $(2012,k)$, deci sunt $\sum_{k=o}^{2012} C_{2012}^{k}$ drumuri pe care le poate face, adică 2^{2012}. Analog pentru Hai. Prin urmare probabilitatea căutată este $\frac{C_{4024}^{2012}}{2^{2012} \cdot 2^{2012}}$.