Clasa a X-a - Etapa 3 - Problema 2

Enunţ: *Fie numerele distincte* $v, w \in \mathbb{C}^*$. *Să se demonstreze că* $\left|z^2 w + \overline{w}\right| \le \left|z^2 v + \overline{v}\right|$ *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ *dacă şi numai dacă există* $k \in [-1, 1]$ *cu proprietatea* $w = kv$.

Soluţie: Dacă $|z| = 1$ atunci $z^2 w + \overline{w} = z\left(zw + \overline{zw}\right)$ şi $\left|z^2 w + \overline{w}\right| \le \left|z^2 v + \overline{v}\right|$ este de fapt echivalentă cu $\left|zw + \overline{zw}\right| \le \left|zv + \overline{zv}\right|$. Folosim scrierile trigonometrice $w = r(\cos a + i\sin a)$, $v = s(\cos b + i\sin b)$ şi $z = \cos t + i\sin t$. Atunci inegalitatea $\left|z^2 w + \overline{w}\right| \le \left|z^2 v + \overline{v}\right|$ este de fapt echivalentă cu $r\left|\cos(a+t)\right| \le s\left|\cos(b+t)\right|$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Pe de altă parte $\frac{w}{v} = \frac{r}{s}\left(\cos(a-b) + i\sin(a-b)\right)$.

Pentru prima implicaţie, alegem $t = -a$ şi avem $r \le s\left|\cos(b-a)\right| \le s$. Apoi $t = \frac{\pi}{2} - b$ şi avem $r\left|\cos\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right)\right| \le 0$ de unde $\sin(a-b) = 0$ deci $\cos(a-b) = \pm 1$ şi $\frac{w}{v} = \pm\frac{r}{s} \overset{not}{=} k \in [-1, 1]$.

Reciproc avem $\sin(a-b) = 0$, deci $a = b + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Apoi $r \le s$ şi inegalitatea $r\left|\cos(a+t)\right| \le s\left|\cos(b+t)\right|$ devine $r\left|\cos(b + l\pi + t)\right| \le s\left|\cos(b+t)\right|$ care este evidentă.