Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro, Ediția a XVI-a, Etapa 5

Barem - Clasa a IX-a

1. Inegalitatea $2^n \geq n^2$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq n_0$. Cea mai mică valoare a numărului natural n_0 este:

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

2. Scrisă ca interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \leq -2\}$ este:

- $(-\infty, -1)$
- $(-\infty, -1]$
- $[-2, 2]$
- $(-\infty, -2]$
- $(-\infty, -3)$

3. Suma soluțiilor ecuației $2|x+1|-|x-2|=x+2$ este:

- 0
- 2
- -2
- $-\frac{3}{2}$
- $\frac{5}{4}$

4. Numerele $a+\sqrt{2}$ și $a\sqrt{2}$, unde $a \in \mathbb{R}$, sunt raționale. Numărul a^2+2 este egal cu:

- 2
- 4
- $2+\sqrt{2}$
- $2-\sqrt{2}$
- 0

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(3,-4\right)$ și $B\left(a,b\right)$, unde a și b sunt numere reale astfel încât $a^2+b^2-6a+8b+21=0$. Distanța dintre punctele A și B este egală cu:

- 1
- $\sqrt{2}$
- 2
- $2\sqrt{2}$
- 4

6. Se consideră trapezul $ABCD$ cu bazele $AB = 14$ și $CD = 7$. Notăm cu M și N mijloacele bazelor AB, respectiv CD și cu O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului.
Dacă $\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{NM}$, atunci numărul real k este egal cu:

- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{3}$
- $-\frac{1}{2}$
- -1

7. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat cu latura de lungime 12. Modulul vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ este:

- 6
- $6\sqrt{3}$
- $12\sqrt{3}$
- 24
- 36

8. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $BM = MN = NC$, iar pe latura AB se consideră punctul P astfel încât $3AP = PB$. Notăm cu Q punctul de intersecție a dreptelor AM și PN. Valoarea raportului $\frac{AQ}{AM}$ este:

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{3}{8}$
- $\frac{2}{3}$

9. Numărul perechilor $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $x^4 - 20x^2 + 16 = \left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 - ax + b\right)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ este:

- 0
- 1
- 2
- 4
- 8

10. Ecuația $x^4 - 20x^2 + 16 = 0$ are patru soluții reale $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Valoarea diferenței $x_4 - x_2$ este:

- $2\sqrt{2}$
- $2\sqrt{3}$
- $2\sqrt{5}$
- $2\sqrt{7}$
- $2\sqrt{11}$

11. Fie N cel mai mare număr natural de trei cifre cu proprietatea că inversul său se scrie în formă zecimală ca fracție periodică simplă având exact patru cifre în perioadă. Suma cifrelor numărului N este:

- 2
- 3
- 18
- 21
- 27

12. Se consideră numărul real $A = \sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100}$. Prima cifră de după virgulă din scrierea zecimală a numărului A este:

- 0
- 2
- 4
- 6
- 8

13. Se consideră ecuația
$x + \frac{10}{x} = [x] + \frac{10}{[x]}$, $x \in \mathbb{R}$.
Suma acelor soluții ale ecuației care aparțin intervalului $(1, 4)$ este:

- 10
- 5
- $8\frac{1}{3}$
- $9\frac{5}{6}$
- $10\frac{5}{6}$

14. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 4$. Punctele G și I sunt centrul său de greutate, respectiv centrul cercului înscris în triunghi. Dacă $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{GI}$, atunci numărul real k este egal cu:

- 6
- -6
- 4
- -12
- -8

15. Fie $ABCD$ un pătrat. Punctele E, F, G, H sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv DA. Notăm $\{I\} = AG \cap BH$, $\{J\} = BH \cap CE$, $\{K\} = CE \cap DF$ și $\{L\} = DF \cap AG$. Raportul dintre ariile patrulaterelor $IJKL$ și $ABCD$ este:

- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{5}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{2}{7}$
- $\frac{3}{8}$

16. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea punctelor $P \in \mathrm{Int}(ABCD)$ cu proprietatea că modulul vectorului $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}$ este minim posibil.
Numărul de elemente ale mulțimii $\mathcal{M}$ este:

- 0
- 1
- 2
- 4
- **infinit**

17. Numărul tripletelor de numere prime (p, q, r) având proprietatea că $p^2 + pq + q^2 = r^2$ este:

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

18. Dacă $|a+b+c| \leq k$, oricare ar fi a, b, c numere reale astfel încât $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=2$, atunci valoarea minimă posibilă a numărului real pozitiv k este:

- 1
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- 2
- 3

19. Se consideră numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$. Numărul divizorilor lui n care sunt pătrate perfecte este egal cu:

- 100
- 120
- 180
- 300
- 500

20. Se consideră mulțimea
$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, [x] \cdot [2x] \cdot [3x] = 6x\}$.
Numărul de elemente ale mulțimii A este:

- 1
- 2
- 3
- 4
- **cel puțin egal cu 5**

21. Valoarea sumei $S = \left[\frac{2}{5}\right] + \left[\frac{2^2}{5}\right] + \left[\frac{2^3}{5}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{100}}{5}\right]$ este:

- $\frac{2^{101}-252}{5}$
- $\frac{2^{100}+152}{5}$
- $\frac{2^{101}-248}{5}$
- $\frac{2^{100}+258}{5}$
- $\frac{2^{102}-248}{5}$

22. Problemele $22-23$ se referă la următorul enunț.

Fie H ortocentrul și O centrul cercului $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC. Notăm cu O_a, O_b și O_c centrele cercurilor $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ și $\mathcal{C}_c$ circumscrise triunghiurilor HBC, HCA, respectiv HAB.

Se consideră următoarele patru propoziții:
P_1 : Simetricul punctului H față de dreapta BC aparține cercului $\mathcal{C}$.
P_2 : Simetricul punctului O față de dreapta BC aparține cercului $\mathcal{C}$.
P_3 : Simetricul punctului H față de mijlocul segmentului BC aparține cercului $\mathcal{C}$.
P_4 : $\overrightarrow{OO_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
Numărul propozițiilor care sunt adevărate în cazul oricărui triunghi ascuțitunghic ABC este egal cu:

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

23. Dacă $\overrightarrow{HO_a} + \overrightarrow{HO_b} + \overrightarrow{HO_c} = k \cdot \overrightarrow{HO}$, atunci numărul real k este egal cu:

- 1
- -1
- 2
- -2
- $\frac{3}{2}$

24. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, a)$, $B(b, 1)$, $C(-1, c)$ și $D(d, -1)$, unde $a, d \in (0, 1)$ și $b, c \in (-1, 0)$. Dintre următoarele numere, cel care *nu* poate fi egal cu aria patrulaterului $ABCD$ este:

- 2
- $\sqrt{5}$
- 3
- π
- $3,75$