Problema 1
Etapa 5
Clasa a X-a

Problema 1. Fie $a \in [1, \infty)$. Găsiți toate numerele reale $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ care verifică egalitatea $a^{2\operatorname{tg} x} + a^{2\operatorname{ctg} x} = a\left(a^{\operatorname{tg} x} + a^{\operatorname{ctg} x}\right)$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție.

Pentru $a = 1$ avem $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pentru $a > 1$ au loc inegalitățile $a^{2\operatorname{tg} x} + a^{2\operatorname{ctg} x} \geq \frac{1}{2}\left(a^{\operatorname{tg} x} + a^{\operatorname{ctg} x}\right)^2 \geq a\left(a^{\operatorname{tg} x} + a^{\operatorname{ctg} x}\right)$, (1) ultima reducându-se la $a^{\operatorname{tg} x} + a^{\operatorname{ctg} x} \geq 2a$, (2).

Inegalitatea (2) este adevărată deoarece, folosind de două ori inegalitatea mediilor avem: $a^{\operatorname{tg} x} + a^{\operatorname{ctg} x} \geq 2\sqrt{a^{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}} 2\sqrt{a^{2\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}}} = 2a$.

Cum ecuația inițială impune egalități în (1), obținem soluția unică $x = \frac{\pi}{4}$.