Problemă. Fie x număr real. Aflaţi valoarea maximă a expresiei

$$E(x) = (a + b\sin x)(a + b\cos x)$$

unde a, b sunt numere reale nenule.

Determinaţi x pentru care se obţine acest maximum.

Cristina-Maria Militaru, Bucureşti

Soluţie. Avem

$$E(x) = b^2 \sin x \cos x + ab(\sin x + \cos x) + a^2$$

care se poate scrie

$$E(x) = \frac{b^2}{2}\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + ab\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + a^2$$

sau

$$E(x) = b^2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + ab\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + a^2 - \frac{b^2}{2}$$

Notăm $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t \in [-1;\ 1]$ şi trebuie să determinăm valoarea maximă a funcţiei

$$f : [-1; 1] \to \mathbb{R},\ f(t) = b^2t^2 + ab\sqrt{2}t + a^2 - \frac{b^2}{2}.$$

Deoarece funcţia de gradul al II-lea de mai sus are punct de minim pe $\mathbb{R}$, trebuie să aflăm care dintre numerele $f(1)$ sau $f(-1)$ este mai mare.

Avem $f(1) = \frac{1}{2}(b + a\sqrt{2})^2$ şi $f(-1) = \frac{1}{2}(b - a\sqrt{2})^2$.

Dacă $ab > 0$, atunci

$$(b + a\sqrt{2})^2 > (b - a\sqrt{2})^2$$

şi deci valoarea maximă este $f(1)$.

În acest caz avem

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

de unde

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Dacă $ab<0$, atunci

$$(b+a\sqrt{2})^2<(b-a\sqrt{2})^2$$

şi deci valoarea maximă este $f(-1)$.

În acest caz avem

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

de unde

$$x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$