Problemă. Dacă $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ este şirul lui Fibonacci, arătaţi că

$$F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

pentru orice n număr natural.

* * *

Soluţie. Demonstrăm prin inducţie.

Pentru $n = 0$ relaţia devine

$$F_1^2 - F_0 \cdot F_1 - F_0^2 = (-1)^0$$

care este adevărată.

Presupunem că relaţia este adevărată pentru $n = k - 1$ şi demonstrăm că este adevărată şi pentru $n = k$. Pentru $n = k - 1$ relaţia se scrie

$$F_k^2 - F_{k-1} \cdot F_k - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$$

iar pentru $n = k$

$$F_{k+1}^2 - F_k \cdot F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$$

Acum,

$$F_{k+1}^2 - F_k \cdot F_{k+1} - F_k^2 = (F_k + F_{k-1})^2 - F_k \cdot (F_k + F_{k-1}) - F_k^2 =$$
$$= F_k^2 + 2 \cdot F_k \cdot F_{k-1} + F_{k-1}^2 - F_k^2 - F_k \cdot F_{k-1} - F_k^2 =$$
$$= -(F_k^2 - F_k \cdot F_{k-1} - F_{k-1}^2) = -(-1)^{k-1} = (-1)^k.$$

În concluzie, relaţia din enunţ este adevărată pentru orice n număr natural.