ViitoriOlimpici.ro

Problema 2
Etapa 2
Clasa a VI-a

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$. Calculaţi *cmmdc* şi *cmmmc* pentru numerele a şi b, unde:

$$a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$$
$$b = 15^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 27 \cdot 15^n.$$

* * *

Soluţie: Descompunem în produs de factori primi numerele a şi b folosind proprietăţile puterilor şi factorul comun.

Avem

$$a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2} = (3^2 \cdot 7)^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - (3 \cdot 7)^n \cdot 3^{n+2} = 3^{2n} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 3^{2n+2} \cdot 7^n = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot (1 + 7 \cdot 3 + 3^2) = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13$$

şi

$$b = 15^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 27 \cdot 15^n = (3 \cdot 5)^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^3 \cdot (3 \cdot 5)^n = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot (5 + 5^2 + 3^2) = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 39 = 3^{n+2} \cdot 5^n \cdot 13$$

Aşadar $a = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13$ şi $b = 3^{n+2} \cdot 5^n \cdot 13$

Pentru $2n \geq n + 2$, adică $n \geq 2$, avem

$$cmmdc = 3^{n+2} \cdot 13 \text{ şi } cmmmc = 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 7^n \cdot 13;$$

Pentru $n = 1$ rezultă $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$ şi $b = 3^3 \cdot 5 \cdot 13$ şi atunci

$$cmmdc = 3^2 \cdot 13 \text{ şi } cmmmc = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13;$$

Pentru $n = 0$ rezultă $a = 13$ şi$b = 3^2 \cdot 13$ şi obținem

$$cmmdc = 13 \text{ şi } cmmmc = 3^2 \cdot 13;$$