Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$x^2 + y^2 = 2013^n.$$

Lucian Dragomir

Soluţie. Vom arăta că mulţimea numerelor naturale n cu proprietatea din enunţ este mulţimea numerelor naturale nenule pare.
Pe de o parte, pentru $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, avem $2013^n = 2013^{2k} = 3^{2k} \cdot 11^{2k} \cdot 61^{2k} = 3^{2k} \cdot 11^{2k} \cdot 61^{2k-2}(60^2 + 11^2) = (3^k \cdot 11^k \cdot 61^{k-1} \cdot 60)^2 + (3^k \cdot 11^k \cdot 61^{k-1} \cdot 11)^2$, deci alegând $x = 3^k \cdot 11^k \cdot 61^{k-1} \cdot 60$ şi $y = 3^k \cdot 11^k \cdot 61^{k-1} \cdot 11$ avem $x^2 + y^2 = 2013^{2k}$, deci orice număr natural nenul par are proprietatea din enunţ.
Pe de altă parte, dacă $x = 3^a x_1$ cu a, $x_1 \in \mathbb{N}$, $(x_1, 3) = 1$, şi $y = 3^b y_1$ cu b, $y_1 \in \mathbb{N}$, $(y_1, 3) = 1$, atunci:
• dacă $a < b$, $x^2 + y^2 = 3^{2a}(x_1^2 + 3^{2b-2a} y_1^2) = 3^{2a}(M3 + 1)$, iar $2013^n = 3^n \cdot 11^n \cdot 61^n$, deci $n = 2a$, adică par;
• dacă $a = b$ $x^2 + y^2 = 3^{2a}(x_1^2 + y_1^2) = 3^{2a}(M3 + 1 + M3 + 1)$, iar $2013^n = 3^n \cdot 11^n \cdot 61^n$, deci $n = 2a$, adică par;
• dacă $a > b$, $x^2 + y^2 = 3^{2b}(3^{2a-2b} x_1^2 + y_1^2) = 3^{2b}(M3 + 1)$, iar $2013^n = 3^n \cdot 11^n \cdot 61^n$, deci $n = 2b$, adică par.
Prin urmare, n trebuie să fie par, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţie. Se putea folosi faptul că dacă o sumă de pătrate este divizibilă cu $p = 3$ atunci fiecare pătrat este divizibil cu $p = 3$. (Acest rezultat este valabil pentru orice număr prim p de forma $M4 + 3$.)
Cum 2013^n este divizibil cu 3, trebuie ca x şi y să fie divizibili cu 3. Dacă $x = 3x_1$, $y = 3x_2$, rezultă că $x^2 + y^2$ este divizibil cu 9, deci $n \geq 2$. Dacă $n \geq 3$ atunci se reia raţionamentul de la început pentru numerele x_1 şi y_1:
din $x_1^2 + y_1^2 = 3^{n-2} \cdot 671^n$ va rezulta că x_1, y_1 sunt divizibili cu 3, deci $n \geq 4$ şi aşa mai departe până când $3^{n-2k} \cdot 671^n$ nu va mai fi divizibil cu 3, lucru care se întâmplă numai pentru n par.