

Andrei Mocănescu – cls.a IV-a, scoala gimnaziala 75

Concursul Gazeta Matematică si ViitoriOlimpici.ro

Editia a VIII-a 2017-2018: Etapa I

Problema nr. 4

Suma a zece numere naturale diferite este 108. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt impare.

* * *

Rezolvare:

În ipoteza problemei nu se cere ca numerele să fie nenule.

Arătăm că concluzia cerută este greșită, printr-un contraexemplu.

Calculăm suma primelor 10 numere naturale pare:

$$S_1 = 0 + 2 + 4 + \dots + 18 = 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times 9 = 2 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 2 \times 9 \times 10 / 2 = 90 \quad (1)$$

Atunci, înlocuim de exemplu pe 18 cu 36 și obținem suma:

$$S_2 = 0 + 2 + 4 + \dots + 16 + 36 = 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times 8 + 36 = 2 \times 8 \times 9 / 2 + 36 = 72 + 36 = 108$$

care este formată numai din numere pare, diferite și este egală cu 108.

Răspuns: Dacă nu se pune condiția ca numerele să fie nenule, se poate găsi o sumă, numai din numere pare, cu valoarea 108. De exemplu: $S_2 = 0 + 2 + 4 + \dots + 16 + 36 = 108$.

Reformulăm problema:

Suma a zece numere naturale diferite și nenule este 108. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt impare.

* * *

Folosim metoda falsei ipoteze, în varianta reducerii la absurd.

Presupunem că nu este adevărată concluzia problemei, adică: niciunul din numere nu este impar sau un singur număr este impar.

Cazul I

1. Niciunul din numere nu este impar

Alegem cele mai mici 10 numere pare, nenule, posibile și facem suma:

$$S = 2 + 4 + 6 + \dots + 20 = 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times 9 + 2 \times 10 = 2 \times 10 \times 11 / 2 = 110 > 108$$

Suma celor mai mici 10 numere nenule și pare este mai mare decât valoarea din ipoteză.

Dacă înlocuim unul sau mai multe din numere, cu altele, mai mari ca 20, suma rezultată va fi

și mai mare decât 108, contradicție. Rezulta că nu e posibil ca niciunul din numere să nu fie impar, adică măcar unul trebuie să fie impar.

Cazul al II-lea

2. Un singur număr este impar

Suma oricăror 10 numere dintre care unul impar și restul pare, este impară și nu poate fi 108 care e par, contradicție din nou.

Rezultă că cel puțin 2 din numere trebuie să fie impare.

Se află ușor o astfel de sumă, de exemplu:

$$S = 2 + 4 + 6 + \dots + 18 + 1 + 17 = 108$$

Răspuns: metoda falsei ipoteze (reducere la absurd)