Etapa 2, Problema 4

Considerăm numerele complexe a, b, c, având acelaşi modul. Arătaţi că

$$\sum \left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right| \leq 3\sqrt{3}.$$

Lucian-Georges Lăduncă, Recreaţii Matematice 2/2001

Soluţie.
Pentru început, vom demonstra că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$AB + BC + CA \leq 3R\sqrt{3}. \quad (*)$$

Într-adevăr, via teorema sinusurilor, (*) revine la faptul că

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

iar această ultimă relaţie rezultă din inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei concave $\sin : (0, \pi) \to \mathbb{R}$.

Revenind la problema iniţială, fie $|a| = |b| = |c| = \rho$; atunci

$$\sum \left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right| = \sum \left| \frac{a^2 - b^2}{ab} \right| = \frac{1}{\rho^2} \sum \left| a^2 - b^2 \right|. \quad (**)$$

Punctele $A\left(a^2\right)$, $B\left(b^2\right)$ şi $C\left(c^2\right)$ sunt situate pe cercul cu centrul în origine şi având raza ρ^2; conform celor demonstrate iniţial, avem că

$$AB + BC + CA \leq 3\rho^2\sqrt{3}.$$

Ţinând acum cont de relaţia (**), urmează cerinţa problemei.

Soluţie alternativă (Ioana Bouroş, Galaţi**).**
Fie α, β, γ argumentele celor trei numere complexe. Un calcul imediat arată că $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 2i \sin(\alpha - \beta)$ şi analoagele, prin urmare concluzia problemei se poate rescrie sub forma

$$|\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| + |\sin(\gamma - \alpha)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Notând $x = \alpha - \beta$, $y = \beta - \gamma$, vom avea de arătat că

$$|\sin x| + |\sin y| + |\sin(x + y)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicând C-B-S, obţinem că

$$|\sin x| + |\sin y| + |\sin(x + y)| \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y)}.$$

Pe de altă parte,

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 (x+y) = \frac{1}{2}(2 - \cos 2x - \cos 2y) + 1 - \cos^2 (x+y)$$

$$= 2 - \cos^2 (x+y) - \cos (x+y) \cos (x-y)$$

$$\leq 2 - \cos^2 (x+y) + |\cos (x+y)| = \frac{9}{4} - \left(|\cos (x+y)| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

şi, de aici, inegalitatea dorită.

Soluţie alternativă (**Andrei George Turcu**, Craiova)**.**

Fie $|a| = |b| = |c| = \rho$; atunci

$$\sum \left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right| = \sum \left|\frac{a^2 - b^2}{ab}\right| = \frac{1}{\rho^2} \sum \left|a^2 - b^2\right|,$$

deci inegalitatea de demonstrat revine la $\left(\sum \left|a^2 - b^2\right|\right)^2 \leq 27\rho^4$. Folosind inegalitatea C-B-S, obţinem că $\left(\sum \left|a^2 - b^2\right|\right)^2 \leq 3\left(\sum \left|a^2 - b^2\right|^2\right)$ şi atunci ar fi suficient să mai arătăm că $\sum \left|a^2 - b^2\right|^2 \leq 9\rho^4$.

Observăm că

$$\sum \left|a^2 - b^2\right|^2 = \sum \left(a^2 - b^2\right)\left(\bar{a}^2 - \bar{b}^2\right) = 6\rho^4 - \sum a^2\bar{b}^2 - \sum \bar{a}^2 b^2$$

şi ar rămâne să dovedim că $3\rho^4 + \sum a^2\bar{b}^2 + \sum \bar{a}^2 b^2 \geq 0$. Această ultimă inegalitate se scrie sub forma

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left|a^2 + b^2 + c^2\right|^2 \geq 0$$

şi este, evident, adevărată.