Clasa a X-a - Etapa 7 - Problema 1

Enunţ. *Fie n un număr natural nenul. Determinaţi toate mulţimile $A \subset \mathbb{C}$, cu exact n elemente, cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, avem $xy \in A$.*

Soluţie. Dacă U_n reprezintă mulţimea rădăcinilor de ordinul n ale unităţii, vom demonstra că $A = U_n$ sau $A = U_{n-1} \cup \{0\}$.

Pentru început, presunpunem $0 \notin A$. Fie $x \in A$. Atunci $x^p \in A$, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$. Cum A este finită, deducem că există $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$ cu $x^p = x^q$. Atunci $x^{q-p} = 1$. Atunci obţinem $1 \in A$ şi pentru orice $x \in A$ există $l \in \mathbb{N}^*$ cu $x^l = 1$.

Acum, fie $x \in A$. Arătăm că $x^n = 1$. Funcţia $f : A \to A$, definită prin $f(t) = xt$ este injectivă, deci bijectivă. Atunci $\prod\limits_{t \in A} f(t) = \prod\limits_{t \in A} t$, de unde $x^n = 1$. Atunci $A \subset U_n$. Cum au acelaşi cardinal, deducem că $A = U_n$.

Dacă $0 \in A$, atunci un raţionament similar pentru $A \setminus \{0\}$ conduce la concluzia că $A \setminus \{0\} = U_{n-1}$, ceea ce încheie problema. ■