PREZENTARE CONCURSUL PANAITOPOL/IMAR 2013

Abstract. Presentation with solutions for the problems of the IMAR Seniors Test, and selected other problems of the Laurenţiu Panaitopol Competition 2013.

Data: 11 noiembrie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii şi de soluţii ale autorului, asupra Testului Seniori IMAR, precum şi a unor probleme spicuite de la probele pe clasă de la concursul Laurenţiu (Bebe) Panaitopol 2013, ediţia a VI-a, este, după cum ne-am obişnuit, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile personale.

2. Testul Seniori – IMAR

Subiectul (1)**.** *Fie p un număr prim strict mai mare decât 3. Să se arate că există măcar două numere prime distincte q şi r în mulţimea $\{2, 3, \ldots, p-2\}$, astfel încât $q^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ şi $r^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.*

Soluţie. Nimic de adăugat la soluţiile oficiale. Problema nu pare grea. □

Subiectul (2)**.** *Pentru fiecare număr natural n, notăm cu s_n suma cifrelor din scrierea în baza 10 a numărului 2^n. Există un rang n_0, astfel încât şirul $(s_n)_{n\geq n_0}$ să fie crescător?*

Soluţie. Notând cu $S(N)$ suma cifrelor din scrierea în baza 10 a numărului N, este bine-cunoscută proprietatea $S(N) \equiv N \pmod 9$. Deoarece ordinul multiplicativ al lui 2 modulo 9 este 6, rezultă că şirul $(s_n)_{n\geq 0}$ este periodic modulo 9, de perioadă $(1, 2, 4, 8, 7, 5)$. Presupunând că de la un rang n_0 şirul $(s_n)_{n\geq n_0}$ este crescător, rezultă că va fi strict crescător, cu diferenţele între termeni consecutivi cel puţin

$$2-1 = 1,\ 4-2 = 2,\ 8-4 = 4,\ (9+7)-8 = 8,\ (9+5)-7 = 7,\ (9+1)-5 = 5,$$

deci $s_{6m+6} \geq s_{6m} + (1 + 2 + 4 + 8 + 7 + 5) = s_{6m} + 27$ pentru $6m \geq n_0$. Iterând, obţinem $s_{6m+6k} \geq s_{6m} + 27k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

[1] Consultaţi enunţurile şi soluţiile oficiale ale Testului tip OIM Seniori IMAR, precum şi ale probelor pe clase VI – XII; de asemenea rezultatele complete, la
`http://ssmr.ro/activitati/concursuri/Laurentiu_Panaitopol_2013`.

Pe de altă parte, o altă bine-cunoscută proprietate a lui $S(N)$ este $S(N) \leq 9\lceil \log_{10} N \rceil$, deci

$$s_{6m+6k} \leq 9\left\lceil \log_{10} 2^{6m+6k} \right\rceil = 9\left\lceil 2(m+k)\log_{10} 2^3 \right\rceil \leq 18(m+k).$$

Aceasta duce la $s_{6m} + 27k \leq 18m + 18k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, absurd pentru $k \to \infty$. $\square$

Remarcă. Un post AoPS din 2008 `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=57&t=207226` stabileşte că $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, ceea ce arată că deşi răspunsul la problema de mai sus este negativ, totuşi limita şirului există şi este infinită.

Un alt post AoPS din 2008 `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=57&t=214057` identifică următoarea problemă ca fiind întrebată în Germania, în 1998; este o variantă mai directă a problemei de mai sus, dar folosind în mod esenţial aceleaşi idei.

> For every positive integer n, let $f(n)$ denote the sum of the decimal digits of n. Prove that there exist infinitely many positive integers k such that $f(3^k) \geq f(3^{k+1})$.

Ideea este aceeaşi. Şirul $(f(3^n))_{n\geq 2}$ este constant egal cu 0 modulo 9. Presupunând că de la un rang n_0 şirul $(f(3^n))_{n\geq n_0}$ este strict crescător, rezultă că diferenţa între termeni consecutivi este cel puţin 9, deci $f(3^{n+1}) \geq f(3^n)+9$ pentru $n \geq n_0$. Iterând, obţinem $f(3^{n+k}) \geq f(3^n) + 9k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte

$$f(3^{n+k}) \leq 9\left\lceil \log_{10} 3^{n+k} \right\rceil = 9\left\lceil ((n+k)/2)\log_{10} 3^2 \right\rceil \leq 9(n+k)/2.$$

Aceasta duce la $2f(3^n) + 18k \leq 9n + 9k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, absurd pentru $k \to \infty$.

Subiectul (3)**.** *Interiorul şi frontiera unui patrulater convex sunt acoperite de patru discuri închise, centrate fiecare în câte unul din vârfurile patrulaterului. Să se arate că vor exista trei dintre aceste discuri care acoperă interiorul şi frontiera triunghiului determinat de centrele lor.*

Soluţie. Precizarea făcută este din cauză că proprietatea nu este adevărată pentru **oricare** trei discuri; este suficient să alegem trei foarte mici, şi un al patrulea acoperind întreg patrulaterul. Deşi problema are o oarecare aromă combinatorică, rămâne puternic geometrică. Prin urmare două probleme (grele) de geometrie într-un acelaşi test, în timp ce primele două probleme sunt (mai uşoare) de teoria numerelor. *Nada* algebră, *nada mas* combinatorică veritabilă. $\square$

Subiectul (4)**.** *Fie ABC un triunghi. Un cerc cu centrul într-un punct O intersectează segmentele BC, CA, AB în punctele X şi X', Y şi Y', respectiv, Z şi Z', notate în ordine circulară: X, X', Y, Y', Z, Z'. Fie M punctul de concurenţă a cercurilor AYZ, BZX, CXY, şi fie M' punctul de concurenţă a cercurilor $AY'Z'$, $BZ'X'$, $CX'Y'$. Să se arate că segmentele OM şi OM' au aceeaşi lungime.*

Soluţie. O problemă grea de geometrie sintetică, cu puncte Miquel, conice, conjugate izogonale, puncte şi elipsă Brocard şi cerc Tucker – în alte cuvinte o problemă tehnică, pe care probabil un specialist în acest tip de configuraţii o putea, mai mult sau mai puţin, deduce din principii generale, dar care rezolvată "cu mijloace de bord" s-a dovedit dificilă. Consultaţi soluţia oficială. Nu mă aventurez în aceste ape infestate de rechini. □

Rezultatele Testului Seniori IMAR nu cred că sunt deloc concludente, din cauza compoziţiei bizare pe domenii matematice a testului. Au participat 27 de concurenţi. Mai ales subiectele 3 şi 4 au creat probleme participanţilor, după cum se vede mai jos. Scorul cel mai mare a fost 16 din 28 posibile. Mediile de puncte pe probleme au fost respectiv 2.89, 1.15, 0.89, 0.04 din 7, cu media de total 5 din 28.

Subiect/Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
1	8	3	3	13
2	4		1	22
3		1	6	20
4				27

Rezultate, aş zice, jalnice. Este adevărat, n-au participat patru dintre cei mai buni (Cerrahoğlu, Spătaru, Bocanu, Gramatovici), dar au fost doar patru scoruri de peste 10 din 28, şi zece scoruri de 1 şi 0. Se pare că impactul compoziţiei testului a fost chiar mai puternic decât l-am anticipat. De mult n-am mai văzut astfel de rezultate – îmbătrânesc ... *o tempora o mores*.

Continuaţi cu paginile următoare, pentru comentarii şi ştiri mai vesele.

3. Clasa a VI-a

Subiectul (2)**.** *Se consideră ecuaţia $x^5 + y^2 = z^3$, unde x, y şi z sunt numere naturale nenule. O soluţie a acestei ecuaţii este un triplet de numere naturale nenule (a, b, c) cu proprietatea că $a^5 + b^2 = c^3$.*

a) Arătaţi că tripletul $(3, 10, 7)$ este soluţie a ecuaţiei date;

b) Determinaţi o soluţie a ecuaţiei date, de forma $(2^m, 2^n, 2^p)$, unde m, n şi p sunt numere naturale.

Soluţie.

a) Singurul merit al acestui punct este să arate că **nu toate** soluţiile sunt ca la punctul următor. Altfel, $3^5 + 10^2 = 343 = 7^3$. .... **2** puncte

b) Scriind $2^{5m} + 2^{2n} = 2^{3p}$, din cunoscuta unicitate a reprezentării numerelor naturale în baza 2 rezultă $5m = 2n = 3p - 1$, de unde $m = 6k + 4$, $n = 15k + 10$, $p = 10k + 7$, pentru orice k natural. Este metoda clasică pentru a găsi o familie infinită de soluţii la astfel de ecuaţii neomogene. .. **5** puncte

□

Subiectul (3)**.** *Numărul natural n are proprietatea că, în scrierea zecimală, fiecare cifră a sa, exceptând-o pe prima, este mai mare decât cifra precedentă.*

a) Determinaţi câte numere n cu proprietatea din enunţ au câte sşapte cifre;

b) Determinaţi suma cifrelor numărului $999n$.

Soluţie.

a) Din moment ce căutăm numere de şapte cifre, care vor trebui să fie distincte şi crescătoare, înseamnă că din numărul $\overline{123456789}$ de nouă cifre trebuie să eliminăm două, ceea ce se poate face în $\binom{9}{2} = 36$ feluri. .**3** puncte

b) O culme a absurdului. Care număr n, folosit în $999n$? Aha! să fie oare **oricare** dintre numerele n cu acea proprietate? dar de ce soluţia oficială lucrează cu $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$?

Ar trebui corectat cu $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$, $1 \le k \le 9$. Atunci observăm că $999n = 1000n - n$, şi cum $1 \le a_k < a_{k-1} < \dots < a_1 \le 9$, cifrele lui $999n$ vor fi, de la dreapta la stânga,

$$10 - a_1, 9 - a_2, 9 - a_3, a_1 - 1 - a_4, a_2 - a_5, \dots, a_6 - a_9, a_7, a_8, a_9,$$

unde am făcut convenţia de notaţie $a_m = 0$ pentru $k < m \le 9$ (deoarece $a_1 \ge 1$ avem $a_1 - a_4 - 1 \ge 0$), şi deci suma cifrelor este 27. .... **4** puncte

În aceste condiţii, din moment ce ni se cere **determinarea** sumei cifrelor lui $999n$ pentru **oricare** dintre numerele n cu acea proprietate, vom putea deduce că ea este **aceeaşi** pentru toate aceste numere; nu ne rămâne decât să lucrăm cu $n = 1$, cel mai simplu dintre ele! □

Remarcă. Rezultatele la această problemă reflectă faptul că probabil n-a fost înţeleasă. Doar şase note de 5, 6 sau 7, dintr-un total de 159 de participanţi.

Subiectul (4)**.** *Determinaţi câte numere naturale de două cifre dau câtul egal cu restul, la împărţirea cu un număr natural nenul.*

Soluţie. Deoarece, pentru $n > 2$, avem $n = 1 \cdot (n-1) + 1$, înseamnă că **orice** astfel de număr corespunde, deci **toate** cele 90 de numere de două cifre corespund. Prin urmare, ce caută aici restricţia la astfel de numere? Şi la ce anume serveşte scrierea $n = qm + r$, $0 \le r < m$, unde dat fiind că $q = r$, putem scrie $n = q(m+1)$, ca să fie răsplătită cu **1** punct în barem – din moment ce nu duce nicăieri? Dar soluţia aceasta a venit mai târziu ... □

4. CLASA A VII-A

Subiectul (3)**.** *Dacă n este un număr natural prim, şi numărul $2n^2+1$ este ~~deasmenea~~ de asemenea prim, stabiliţi dacă numărul n^6+2 este prim.*

Soluţie. Pentru $n \neq 3$ prim, avem $3 \mid 2n^2+1 > 3$, deci ne-prim. Pentru $n = 3$ avem $2n^2+1 = 19$ prim, dar $n^6+2 = 731 = 17 \cdot 43$, deci ne-prim. Soluţia oficială, lucrând cu $n \geq 2$, $n \neq 3$, obţine un ciudat, inutil, şi greşit $2n^2+1 \geq 17$. Nota zero, domnilor profesori! Oricum, o problemă incredibilă ca interes, dificultate, negativitate. □

5. CLASA A VIII-A

Subiectul (2)**.** *Determinaţi numerele naturale compuse care au toţi divizorii de forma $2^k \pm 1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$.*

LUCIAN PETRESCU, Tulcea

Soluţie. Condiţia de non-primalitate este esenţială, deoarece numere prime Fermat, de forma $2^{2^n}+1$, sau prime Mersenne, de forma 2^p-1 cu p prim, nu sunt complet cunoscute nici unele, nici altele. Deoarece însă factorii primi (cel puţin doi) ai unui astfel de număr compus sunt printre acestea menţionate, problema se reduce la o analiză amănunţită a unei ecuaţii de forma

$$(2^a \pm 1)(2^b \pm 1) = 2^c \pm 1,$$

ce la rândul ei revine la utilizarea unicităţii reprezentării numerelor naturale în baza 2. După plicticos de multe, dar simple cazuri, se ajunge la singurele astfel de numere compuse $9 = 3^2$ şi $15 = 3 \cdot 5$. □

Remarcă. Soluţia oficială se complică uneori poate prea mult. Reminiscenţe de Problema 2 b) de la clasa a VI-a; aceeaşi exploatare trivială a reprezentării în baza 2. Nu întâmplător însă, cele mai slabe punctaje de la această clasă.

Subiectul (4)**.** *Determinaţi numerele prime p şi q astfel încât să aibă loc egalitatea $7p^2 = q^2 + 1174$.*

LUCIAN PETRESCU, Tulcea

Soluţie. Evident $p > 3$. Dacă $q \neq 3$ vom avea $1 \equiv 1174 = 7p^2 - q^2 \equiv p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod 3$, absurd. Prin urmare trebuie $q = 3$, şi atunci $7p^2 = 1183 = 7 \cdot 13^2$, deci $p = 13$. □

Remarcă. Soluţia oficială se complică inutil, considerând mai întâi paritatea numerelor p, q, iar apoi lucrând modulo 6 (de unde probabil vine şi alegerea coeficientului din $7p^2$). Reminiscenţe de Problema 3 de la clasa a VII-a; aceeaşi exploatare trivială modulo 3, şi aceeaşi irelevanţă (acelaşi autor?).

Diferenţa uriaşă între lungimile respective ale soluţiilor problemelor 2 şi 4 ar fi trebuit să dea un semnal suficient de puternic pentru a le fi fost schimbată poziţionarea.

6. CLASA A IX-A

Subiectul (2).

a) Arătaţi că, dacă a, b sunt numere reale pozitive, atunci

$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3.$$

b) Determinaţi cel mai mic număr real k pentru care, oricare ar fi a, b, c numere reale pozitive,

$$k(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3.$$

Soluţie.

a) Din Hölder (sau Power Mean), $(1+1)(1+1)(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$, cu egalitate doar pentru $a = b$. .... **3** puncte

b) Tot din aceleaşi, $(1+1+1)(1+1+1)(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$, cu egalitate doar pentru $a = b = c$. Prin urmare $k_{\min} = 9$, căci pentru $k \geq 9$ avem $k(a^3 + b^3 + c^3) \geq 9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$, iar pentru $k = k_{\min}$ există caz de egalitate. .... **4** puncte

$\square$

Remarcă. Desigur, această soluţie ar fi fost aspru penalizată; dar dacă nu, care este raţiunea utilizării unor cazuri particulare de inegalităţi celebre? În general, pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive, şi p întreg pozitiv, avem (caz particular al inegalităţilor menţionate mai sus)

$$n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^p,$$

dar acum o soluţie prin simple manipulări algebrice nu mai merge. Oare vom da în viitor şi cazuri particulare ale inegalităţilor Cauchy-Schwarz, Maclaurin, Newton, *et alia*?[2]

[2]Cel puţin, problema mea, dată la clasa a IX-a, etapa finală ONM 2007

Determinaţi valoarea maximă a expresiei

$$(x^3 + 1)(y^3 + 1)$$

pentru $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y = 1$.

evita o astfel de reducere directă la inegalităţi cunoscute.

Subiectul (3)**.** *Dacă x, y sunt numere reale pozitive definim*

$$m_h(x,y) = \frac{2xy}{x+y}, m_g(x,y) = \sqrt{xy}, m_a(x,y) = \frac{x+y}{2}, m_p(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

a) Arătaţi că, dacă $m_h(x,y) + m_a(x,y) = m_g(x,y) + m_p(x,y)$, atunci $x = y$.
b) Arătaţi că, dacă $m_h(x,y) + m_p(x,y) = m_g(x,y) + m_a(x,y)$, atunci $x = y$.

Soluţie.

b) Se demonstrează (prin ridicări la pătrat) $m_a - m_h \leq m_p - m_g$, cu egalitate pentru $x = y$. .... **4** puncte

a) Atunci $m_h + m_a \leq m_g + m_a \leq m_h + m_p \leq m_g + m_p$, deoarece $m_h \leq m_g$, deci *a fortiori* concluzia. .... **3** puncte

□

7. Clasa a X-a

Subiectul (1)**.** *Fie a un număr real. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea*

$$f(x) + f(y) = (x+y+a)f(x)f(y), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. (**pco** on AoPS) Dacă ar putea exista $x \in \mathbb{R}$ cu $f(x) \neq 0$, atunci luând $y = \dfrac{1}{f(x)} - x - a$ obţinem $f(x) + f(y) = \dfrac{1}{f(x)} f(x)f(y) = f(y)$, de unde $f(x) = 0$, contradicţie. Prin urmare singura posibilitate este $f \equiv 0$. □

Subiectul (2)**.** *Un număr raţional $a > 0$ are proprietatea că $\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}$ este raţional. Arătaţi că $\sqrt[6]{a}$ este raţional.*

Soluţie. Fie $x = \sqrt[6]{a} > 0$. Atunci x^6 şi $x^3 + x^2$ sunt ambele raţionale. Deci $(x^2(x+1))^3 = x^6(x^3+3x^2+3x+1)$ este raţional, de unde x^3+3x^2+3x+1 este raţional, dar şi $(x^3(1+1/x))^2 = x^6(1+2/x+1/x^2)$ este raţional, de unde $1+2/x+1/x^2$ este raţional, adică $x^2+2x+1 = rx^2$, cu $r > 0$ raţional. Nu putem avea $r = 1$, căci atunci $0 < 2x+1 = 0$, absurd, deci putem scrie că

$$x^3+3x^2+3x+1 = (x^3+x^2) - \frac{(1+3r)x+(1+r)}{1-r}$$

este raţional, deci $\dfrac{(1+3r)x+(1+r)}{1-r}$ este raţional, deci x este raţional (căci $0 < 1+3r \neq 0$). □

Subiectul (4)**.** *Arătaţi că şirul definit prin*

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

conţine o infinitate de termeni divizibili cu 7.

Soluţie. Soluţia oficială pare să înceapă greşit, cu $7 \mid a_6 = 14$, când de fapt $a_5 = 7$, dar $a_6 = 10$. Nu prea contează, căci ideea este ca odată găsit un termen divizibil cu 7 să se găsească un altul, de indice mai mare.

Din $a_{2n} = a_{2n-1} + a_n$ şi $a_{2n+1} = a_{2n} + a_n$ rezultă că dacă $7 \mid a_n$ vom avea $a_{2n-1} \equiv a_{2n} \equiv a_{2n+1} \pmod 7$. Urcând la indici în jurul valorii $4n$ (pentru a putea explicita relaţia de recurenţă), obţinem $a_{4n-2} = a_{4n-3} + a_{2n-1}$ şi celelalte similare, până la $a_{4n+3} = a_{4n+2} + a_{2n+1}$. Rezultă atunci imediat că $a_{4n-3+k} \equiv a_{4n-3} + ka_{2n} \pmod 7$ pentru $0 \leq k \leq 6$, şi deci sau a_{2n} se divide cu 7, sau unul dintre ele se divide cu 7. Cum $a_5 = 7$, înseamnă că putem găsi infinit de mulţi termeni divizibili cu 7, dar nu neapărat pe toţi (metoda de mai sus produce $a_{4\cdot 5-3} = a_{17} = 7 \cdot 17$, dar există şi $a_{14} = 7 \cdot 10$). □

8. Clasele a XI-a şi a XII-a

Subiectul (2)**.** *Fie $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie bijectivă. Arătaţi că, dacă şirul*

$$\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$$

are limită, atunci aceasta este 1.

Soluţie. Următoarea problemă apare pe AoPS în februarie 2009
`http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=38&t=259124`
identificată ca parte din concursul **Baltic Way 1992** (probabil folclor), cu soluţia mea, postată în august 2012 (cu traducere în limba română).

> Let $\phi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ be a bijective function, and assume that there exists a (finite) limit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi(n)}{n} = L$. What are the possible values of L?

1. Să presupunem că există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\phi(n) > n$ pentru toţi $n \geq N$. Atunci $\phi(n) > N$ pentru toţi $n \geq N$, deci valorile din mulţimea $\{1, 2, \ldots, N\}$ nu pot fi toate atinse. Prin urmare pentru orice N există $n \geq N$ astfel încât $\phi(n) \leq n$, şi deci $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi(n)}{n} \leq 1$. (folosim surjectivitatea)

2. Să presupunem că există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\phi(n) < n$ pentru toţi $n \geq N$. Fie $m = \max\{\phi(k) \mid 1 \leq k \leq N\}$. Evident $m \geq N$, dar atunci $\max\{\phi(k) \mid 1 \leq k \leq m+1\} = m$, absurd. Prin urmare pentru orice N există $n \geq N$ astfel încât $\phi(n) \geq n$, şi deci $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi(n)}{n} \geq 1$. (folosim injectivitatea)

3. Prin urmare, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi(n)}{n}$ există, nu poate decât a fi egală cu 1. Un exemplu trivial este $\phi(n) = n$ pentru $n \geq 1$, dar există şi alte exemple, ca $\phi(2n-1) = 2n$, $\phi(2n) = 2n-1$ pentru $n \geq 1$, sau multe altele. □

Subiectul (3)**.** *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit prin*

$$x_1 = a \in \mathbb{R},\ x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Pentru câte valori ale lui a avem $x_{2013} = 0$?

Soluţie. Funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = 4x(1-x)$ este astfel încât $x_{n+1} = f(x_n)$ pentru orice $n \geq 1$, deci $x_n = f^{n-1}(a)$ (unde f^k este iterata k a funcţiei f, cu $f^0 = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$). Pentru $a < 0$ sau $a > 1$ şirul $(f^n(a))_{n\geq 1}$ este descrescător (prin valori negative), deci $f^{2012}(a) = 0$ forţează $a \in [0,1]$. Dar acum o substituţie clasică ne permite să putem lua $a = \sin^2\theta$ pentru un $\theta \in [0, \pi/2]$, deci $f(a) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta$, şi atunci prin iterare $f^{n-1}(a) = \sin^2 2^{n-1}\theta$. Finalmente, $0 = f^{2012}(a) = \sin^2 2^{2012}\theta$, rezultând în $\theta = \dfrac{k\pi}{2^{2012}}$ pentru $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{2011}\}$, adică $2^{2011} + 1$ valori posibile pentru θ, şi deci tot atâtea pentru a. □

Subiectul (4)**.** *Într-o clasă sunt $2m$ elevi, $m \in \mathbb{N}^*$. Numele fiecărui elev este scris pe câte un bilet, apoi fiecare elev ia câte un bilet la întâmplare. O* ***mutare*** *constă în împărţirea elevilor în m perechi şi schimbarea biletelor între cei doi membri ai fiecărei perechi. Este adevărat că, pentru orice distribuţie iniţială a biletelor, mutările pot fi astfel organizate încât la un moment dat fiecare elev să aibă biletul pe care este scris propriul nume, dacă*

a) $m = 14$?
b) $m = 15$?

Soluţie. Problema se dovedeşte doar un exerciţiu (relativ elementar) de teoria permutărilor. Configuraţia iniţială este o permutare $\sigma \in \mathcal{S}_{2m}$ din grupul simetric pe $2m$ elemente, iar o mutare înseamnă compunerea lui σ cu m transpoziţii disjuncte. . . . . **1** punct

a) Pentru m par, signatura lui σ rămâne invariată de orice mutare (căci σ se compune cu un număr m par de transpoziţii, fiecare de signatură -1); deci dacă $\operatorname{sgn}(\sigma) = \epsilon_\sigma = -1$, nu putem obţine permutarea identică, care este de signatură $+1$. . . . . **2** puncte

b) Pentru m impar, este suficient să arătăm că există o succesiune de mutări prin care, pentru orice k cu $\sigma(k) \neq k$, permutarea σ să ajungă să devină $\tau(k, \sigma(k)) \circ \sigma$ (unde $\tau(i,j) = (i,j)$ este transpoziţia poziţiilor $i \neq j$), deci să fixeze poziţia k. Atunci, pas cu pas, fiecare poziţie poate fi făcută punct fix. Fie deci un astfel de k; atunci, în afară de perechea $\{k, \sigma(k)\}$, restul elementelor este un multiplu de 4, deci poate fi partiţionat în cvadruplete. Pentru fiecare astfel de cvadruplet $q = \{a, b, c, d\}$ considerăm compunerile de transpoziţii $q_1 = (a,b) \circ (c,d)$, $q_2 = (a,c) \circ (b,d)$, $q_3 = (a,d) \circ (b,c)$, şi deoarece

$$((a,b) \circ (c,d)) \circ ((a,c) \circ (b,d)) \circ ((a,d) \circ (b,c)) = (a) \circ (b) \circ (c) \circ (d),$$

înseamnă că după cele trei mutări $m_i = \left(\tau(k, \sigma(k)) \circ \prod\limits_q q_i\right) \circ \sigma$, $i = 1, 2, 3$, ajungem într-adevăr la $\tau(k, \sigma(k)) \circ \sigma$. . . . . **4** puncte

Soluţia nu are de fapt nimic de-a face cu remarca din soluţia oficială că grupul simetric este generat de transpoziţii. Nu facem altceva decât, pas cu pas, să atribuim câte unui elev biletul care poartă propriul său nume. □

9. Încheiere

Un amănunt caraghios ☺. Pagina site-ului SSMR dedicată concursului anunţă

> La proba tip O.I.M. pot participa elevii care doresc să intre în componenţa loturilor olimpice pentru concursurile internaţionale din anul **2013**.

Mai greu aceasta (în engleză, "a tall order"), în afară de cazul că ne putem întoarce în timp ... ceea ce nu ar fi neapărat foarte rău. Dar *maşina timpului* n-a inventat-o decât H. G. Wells. (De altfel, anul trecut anunţul făcea referinţă la **2012**, deci eroarea se repercutează).

Iar semnul "achtung!" ⚠ care precede soluţiile şi rezultatele ediţiei **2013** continuă să trimită printr-un link la anunţul premiilor oferite de eMAG **anul trecut**.

Subiectele, soluţiile şi rezultatele (mai puţin cele de la Testul Seniori) au apărut, de data aceasta, în timp util; de semnalat şi salutat. Corectura Testului Seniori n-a mers însă în ritmul aşteptat – pentru prima dată poate, rezultatele nu au fost cunoscute în seara concursului. Nu că ar fi un lucru rău să se renunţe la graba obişnuită, dar măcar acest lucru să fie premeditat, şi nu accidental (era să scriu "occidental", dar pe-acolo nu se face aşa). De-abia a doua zi pe seară rezultatele au fost postate.

Exista, în trecut, bunul obicei ca una dintre problemele fiecărei clase să fi fost o creaţie a regretatului Bebe Panaitopol, în memoria căruia a fost numit concursul; poate că este încă şi acum cazul, dar numele autorilor nu sunt prezente în materialul cu soluţiile oficiale.

Subiectele au fost de un grad în general redus de dificultate (mai ales la gimnaziu, unde s-a coborât chiar mai jos decât nivelul unei faze locale ONM), ceea ce a dus la punctaje relativ mari şi foarte mari. Problemele n-au avut în general un conţinut atrăgător, unele dintre ele fiind chiar stângace, mai ales la gimnaziu. Subiectele de liceu sunt mai relevante, dar am văzut şi ani trecuţi de o calitate mai înaltă.