

**Problema 2.** Fie  $a, b, c$  trei numere naturale astfel încât  $a^2 + b = c^2 + c$ .  
Demonstrați că  $a \leq b$ .

**Soluție:**

Presupunem, prin absurd, că numerele naturale  $a, b, c$  satisfac  $a^2 + b = c^2 + c$  și  $a > b$ .

Atunci  $c^2 + c = a^2 + b < a^2 + a$ . Dacă am avea  $a \leq c$ , ar rezulta  $a^2 \leq c^2$  și apoi  $a^2 + a \leq c^2 + c$ , ceea ce ar contrazice  $c^2 + c < a^2 + a$ . Așadar, trebuie ca  $a > c$ , adică  $a \geq c + 1$ . Dar atunci  $a^2 + b \geq (c + 1)^2 + 0 = c^2 + 2c + 1 > c^2 + c$ , ceea ce contrazice egalitatea  $a^2 + b = c^2 + c$ .

Astfel, am ajuns la o contradicție, ceea ce arată că presupunerea de la care am pornit este falsă, deci că  $a \leq b$ .