## Clasa a X-a - Etapa 5 - Problema 3

*Fie* $\{a_1, a_2, ..., a_9\} \subset \mathbb{R}$. *Demonstrați că există* $x, y \in \{a_1, a_2, ..., a_9\}$, *distincte, astfel încât*

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \sqrt{2}-1.$$

**Soluție.** Fără a pierde din generalitate, putem presupune că $a_1 < a_2 < ... < a_9$. Funcția $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f(u) = \operatorname{arctg} u$ este bijectivă și strict crescătoare. Atunci există $b_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $i \in \{1,2,3,...,9\}$, astfel încât $f(a_i) = b_i$. Deoarece $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, atunci există $j \in \{1,2,...,8\}$ astfel încât $0 < b_{j+1} - b_j < \frac{\pi}{8}$. Atunci $0 < \operatorname{tg}\left(b_{j+1} - b_j\right) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, de unde obținem $0 < \frac{a_{j+1} - a_j}{1 + a_{j+1}a_j} < \sqrt{2} - 1$.