

## PUTERI

**ABSTRACT.** În articolul de față sunt prezentate proprietățile puterilor și modul de aflare a cifrei unităților unei puteri

Lecția se adresează clasei a V-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

Să ne amintim ce înseamnă să ridicăm un număr natural  $a$  la o putere  $n$ , număr natural.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n\text{-ori}}$$

Pornind de la această definiție putem formula următoarele proprietăți ale puterilor:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad (n > m)$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

### Compararea puterilor

Există două situații "fericite" în care putem compara două puteri: atunci când au aceeași bază și atunci când au același exponent.

1. Când două puteri au aceeași bază, este mai mare puterea cu exponentul mai mare.

$$n > m \Leftrightarrow a^n > a^m$$

2. Când două puteri au același exponent, este mai mare puterea care are baza mai mare.

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$$

În cazul în care nu ne aflăm în niciuna din situațiile de mai sus încercăm, pe baza proprietăților, să ajungem la una din cele două situații "fericite".

**Exercițiu 1.** Comparați  $2^{105}$  și  $3^{75}$ .

**Soluție:** Este evident că nu putem ajunge la aceeași bază. Vom încerca să ajungem la același exponent. Observăm că  $105 = 7 \cdot 15$ , iar  $75 = 5 \cdot 15$ .

Avem

$$2^{105} = 2^{7 \cdot 15} = (2^7)^{15} = 128^{15}$$

și

$$3^{75} = 3^{5 \cdot 15} = (3^5)^{15} = 243^{15}$$

Cum  $128 < 243$  rezultă  $128^{15} < 243^{15}$ , de unde  $2^{105} < 3^{75}$ .

**Exercițiul 2.** Comparați  $3^{91}$  cu  $9^{45}$ .

**Soluție:** Deoarece

$$9 = 3^2$$

putem scrie

$$9^{45} = (3^2)^{45} = 3^{90}$$

Cum

$$91 > 90$$

rezultă

$$3^{91} > 3^{90}$$

adică

$$3^{91} > 9^{45}$$

**Exercițiu 3.** Comparați  $3^{55}$  cu  $5^{36}$ .

**Soluție:** De această dată nu se poate ajunge nici la aceeași bază nici la același exponent. Într-o asemenea situație ne folosim de o putere intermediară.

În cazul nostru este evident că

$$3^{55} > 3^{54} \quad (1)$$

Vom arăta acum că

$$3^{54} > 5^{36}$$

Avem

$$3^{54} = 3^{3 \cdot 18} = (3^3)^{18} = 27^{18}$$

și

$$5^{36} = 5^{2 \cdot 18} = (5^2)^{18} = 25^{18}$$

Cum

$$27^{18} > 25^{18}$$

rezultă

$$3^{54} > 5^{36} \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem

$$3^{55} > 5^{36}$$

### Ultima cifră a unei puteri

Sunt mai multe situații în care ridicarea la putere este incomod de efectuat, dar este suficient să cunoaștem ultima cifră a numărului pe care l-am putea obține prin ridicare la putere. Să ne gândim la divizibilitatea cu 2, 5 sau 10 care presupune să cunoștem numai ultima cifră a numărului. În acest caz, pentru a vedea dacă 5 este un divizor pentru  $14^{2011} + 1$  avem nevoie numai de cifra unităților lui  $14^{2011} + 1$ .

Ne mai putem gândi și la un pătrat perfect a cărui ultimă cifră nu poate fi 2, 3, 7 sau 8. De exemplu, pentru a arăta că  $2^{2011} + 5$  nu este pătrat perfect este suficient să arătăm că ultima cifră a lui  $2^{2011} + 5$  este 2, 3, 7 sau 8.

Cred că sunt suficiente argumentele pentru a justifica necesitatea aflării ultimei cifre a unei puteri.

Vom nota cu  $u(n)$  ultima cifră a numărului  $n$ .

**Observația 1.** Ultima cifră a unui număr  $n^p$  ( $n$  număr natural și  $p$  număr natural nenul) este aceeași cu ultima cifră a cifrei unităților lui  $n$  ridicată la puterea  $p$ .

Exemplu:  $u(574^p) = u(4^p)$ .

**Observația 2.**  $u(a \cdot b) = u(u(a) \cdot u(b))$  și  $u(a + b) = u(u(a) + u(b))$ .

Exemplu:  $u(274 \cdot 379) = u(4 \cdot 9) = 6$  sau  $u(274 + 379) = u(4 + 9) = 3$

În baza observației 1 este suficient să cunoaștem  $u(1^n)$ ;  $u(2^n)$ ;  $u(3^n)$ ;  $u(4^n)$ ;  $u(5^n)$ ;  $u(6^n)$ ;  $u(7^n)$ ;  $u(8^n)$ ;  $u(9^n)$ ;  $u(0^n)$ , unde  $n$  este număr natural nenul.

Pentru  $u(1^n)$  și  $u(0^n)$  lucrurile sunt clare

$$u(1^n) = 1 \text{ și } u(0^n) = 0$$

La fel de simplu stau lucrurile și în cazul  $u(5^n)$  sau  $u(6^n)$

Observăm că  $u(5^1) = 5$ ;  $u(5^2) = 5$ ;  $u(5^3) = 5$  de unde deducem că

$$u(5^n) = 5$$

Pentru  $u(6^n)$ , din  $u(6^1) = 6$ ;  $u(6^2) = 6$ ;  $u(6^3) = 6$  deducem

$$u(6^n) = 6$$

Ne ocupăm acum de  $2^n$ .

Avem  $u(2^1) = 2$ ;  $u(2^2) = 4$ ;  $u(2^3) = 8$ ;  $u(2^4) = 6$ .

Deoarece  $u(2^4) = 6$  și  $u(6^n) = 6$  putem gândi astfel:

Număr  $n$  este de forma  $n = 4 \cdot k + r$ , unde  $r$  poate fi 0, 1, 2 sau 3.

Atunci  $u(2^n) = u(2^{4k+r}) = u(2^{4k} \cdot 2^r) = u((2^4)^k \cdot 2^r) = u(16^k \cdot 2^r) = u(6^k \cdot 2^r) = u(6 \cdot 2^r)$

Așadar,

$$u(2^n) = u(2^{4k+r}) = u(6 \cdot 2^r)$$

unde  $r$  poate fi 0, 1, 2 sau 3.

**Exemplu:**  $u(2^{2011}) = u(2^{4 \cdot 502 + 3}) = u(6 \cdot 2^3) = 8$

Pentru  $u(3^n)$ ;  $u(7^n)$  respectiv  $u(8^n)$  avem reguli asemănătoare deoarece  $u(3^4) = 1$ ;  $u(7^4) = 1$  și  $u(8^4) = 6$ .

Așadar,

$$u(3^n) = u(3^{4k+r}) = u(1 \cdot 3^r) = u(3^r)$$

$$u(7^n) = u(7^{4k+r}) = u(1 \cdot 7^r) = u(7^r)$$

$$u(8^n) = u(8^{4k+r}) = u(6 \cdot 8^r)$$

unde  $r$  poate fi 0, 1, 2 sau 3.

Ne ocupăm acum de  $4^n$

Avem  $u(4^1) = 4$  și  $u(4^2) = 6$ . Deoarece  $u(4^2) = 6$  putem gândi astfel:

Numărul  $n$  este de forma  $n = 2 \cdot k + r$ , unde  $r$  poate fi 0 sau 1.

Atunci  $u(4^n) = u(4^{2k+r}) = u(4^{2k} \cdot 2^r) = u((4^2)^k \cdot 4^r) = u(16^k \cdot 4^r) = u(6 \cdot 4^r)$

Așadar,

$$u(4^n) = u(4^{2k+r}) = u(6 \cdot 4^r)$$

unde  $r$  poate fi 0 sau 1.

Pentru  $9^n$ , deoarece  $u(9^2) = 1$  avem o regulă asemănătoare.

$$u(9^n) = u(9^{2k+r}) = u(9^r)$$

unde  $r$  poate fi 0 sau 1.

**Exercițiu 4.** Aflați ultima cifră a numărului  $a = 2^{2010} + 3^{2011} + 4^{2012}$ .

**Soluție:** Avem

$$u(2^{2010}) = u(2^{4 \cdot 502 + 2}) = u(6 \cdot 2^2) = 4$$

$$u(3^{2011}) = u(3^{4 \cdot 502 + 3}) = u(3^3) = 7$$

$$u(4^{2012}) = u(4^{2 \cdot 1006}) = u(6 \cdot 4^0) = 6$$

și atunci

$$u(a) = u(4 + 7 + 6) = 7$$

**Exercițiu 5.** Arătați că numărul  $107^{103} + 103^{107}$  are ca divizor pe 10.

**Soluție:** Un număr are ca divizor pe 10 dacă ultima sa cifră este 0. Așadar, trebuie să aflăm ultima cifră a numărului.

Avem

$$u(107^{103}) = u(7^{103}) = u(7^{4 \cdot 25 + 3}) = u(7^3) = 3$$

și

$$u(103^{107}) = u(3^{107}) = u(3^{4 \cdot 26 + 3}) = u(3^3) = 7$$

De aici

$$u(107^{103} + 103^{107}) = u(3 + 7) = 0$$

ceea ce arată că numărul  $107^{103} + 103^{107}$  are ca divizor pe 10.

### Alte probleme cu puteri

**Problema 1.** Arătați că pentru orice număr natural  $n$ , numărul

$$A = 2^{2n+4} \cdot 9^n + 2^{2n} \cdot 9^{n+1}$$

este pătrat perfect.

**Soluție:** Folosind proprietățile puterilor expuse mai sus și factorul comun avem

$$A = 2^{2n} \cdot 2^4 \cdot 9^n + 2^{2n} \cdot 9^n \cdot 9 = 2^{2n} \cdot 9^n \cdot (2^4 + 9) = 2^{2n} \cdot 9^n \cdot 25 = (2^n)^2 \cdot (3^2)^n \cdot 5^2 = (2^n \cdot 3^n \cdot 5)^2$$

ceea ce arată că  $A$  este pătrat perfect.

**Problema 2.** Arătați că numărul

$$a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$$

este multiplu de 13.

**Soluție:** Putem scrie

$$a = (3^2 \cdot 7)^n + 7^n \cdot 7 \cdot 3^{2n} \cdot 3 - (3 \cdot 7)^n \cdot 3^n \cdot 3^2 = 3^{2n} \cdot 7^n + 7^n \cdot 3^{2n} \cdot 21 - 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 9 = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot (1 + 21 - 9) = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13.$$

Deoarece  $a$  conține factorul 13 este evident că el este multiplu de 13.

**Problema 3.** Care număr este mai mare  $a = 3^{454} - 3^{453} - 3^{452}$  sau  $b = 5^{340}$ ?

*Olimpiadă Vâlcea*

**Soluție:** Pe  $a$  îl putem scrie

$$a = 3^{452} \cdot (3^2 - 3 - 1) = 3^{452} \cdot 5$$

și atunci trebuie comparat  $3^{452} \cdot 5$  cu  $5^{340}$  sau  $3^{452}$  cu  $5^{339}$ .

Putem scrie

$$3^{452} = 3^{4 \cdot 113} = (3^4)^{113} = 81^{113}$$

și

$$5^{339} = 5^{3 \cdot 113} = (5^3)^{113} = 125^{113}$$

Acum, având același exponent, cum

$$81 < 125$$

rezultă

$$81^{113} < 125^{113}$$

adică  $b$  este mai mare decât  $a$ .

**Problema 4.** Scrieți în ordine crescătoare numerele:  $4^{14}$ ;  $5^{12}$ ;  $7^{11}$ ;  $11^7$ .

*Olimpiadă Galați*

**Soluție:** Avem

$$4^{14} = (2^2)^{14} = 2^{28} = (2^7)^4 = 128^4 \quad (1)$$

și

$$5^{12} = (5^3)^4 = 125^4 \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$4^{14} > 5^{12} \quad (*)$$

Din

$$\begin{aligned} 125^4 &> 121^4 \\ 121^4 &= (11^2)^4 = 11^8 \end{aligned}$$

și

$$11^8 > 11^7$$

obținem

$$5^{12} > 11^7 \quad (**)$$

Acum

$$7^{11} = 7^9 \cdot 7^2 = (7^3)^3 \cdot 7^2 = 343^3 \cdot 49$$

Dar

$$343^3 \cdot 49 > 256^3 \cdot 16$$

și

$$256^3 \cdot 16 = (2^8)^3 \cdot 2^4 = 2^{24} \cdot 2^4 = 2^{28} = 4^{14}$$

Din cele de mai sus deducem că

$$7^{11} > 4^{14} \quad (***)$$

Din (\*), (\*\*) și (\*\*\*) rezultă următoarea ordine crescătoare:

$$11^7; 5^{12}; 4^{14}; 7^{11}$$