**P4.** Studiaţi dacă există funcţii $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(f(x)) = x^2 + 2$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
**S.** Vom arăta că există funcţii cu proprietatea din enunţ, construind un exemplu de astfel de funcţie.
Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, şi $x_n = x_{n-2}^2 + 2$, $(\forall)n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Deoarece $x_0 < x_1 < x_2$ şi funcţia $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $\varphi(t) = t^2 + 2$, $(\forall)t \geq 0$, este strict crescătoare, rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.
Notăm pentru $k \in \mathbb{N}$ oarecare $I_k = [x_k, x_{k+1})$. Atunci $[0, \infty) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} I_k$.
Definim funcţiile $f_k : I_k \longrightarrow I_{k+1}$ recursiv prin $f_0(x) = x^2 + 1$ şi $f_{k+1}(x) = \varphi(f_k^{-1}(x))$, $(\forall)k \in \mathbb{N}$. Fiecare funcţie $f_k$ este atunci continuă, strict crescătoare şi bijectivă.
Definim atunci $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$f(x) = f_k(x) \quad , \text{ dacă } x \geq 0 \quad \text{şi } x \in I_k,$$

respectiv $f(x) = f(-x)$, dacă $x < 0$. Obţinem că

$$f(f(x)) = f_{k+1}(f_k(x)) = \varphi(f_k^{-1}(f_k(x))) = \varphi(x) = x^2 + 2 \quad , (\forall)x \geq 0, x \in I_k,$$

respectiv

$$f(f(x)) = f(f(-x)) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 \quad , (\forall)x < 0.$$

Funcţia $f$ construită mai sus verifică condiţia din enunţ.

**Observaţie 1.** Evident, în construcţia de mai sus puteam considera $x_1 \in (0, 2)$ oarecare şi $f_0 : I_0 \longrightarrow I_1$ o funcţie continuă, strict crescătoare şi bijectivă oarecare. Rezultă că există o infinitate de funcţii care verifică condiţia din enunţ. În plus, toate aceste funcţii, construite ca mai sus, vor fi continue.