Etapa 3, Problema 3

Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru O şi rază egală cu 1, iar M un punct oarecare pe cerc. Notăm cu D, E şi F mijloacele segmentelor MA, MB respectiv MC. Demonstraţi că

$$MD^2 + ME^2 + MF^2 = \frac{3}{2}.$$

***

Soluţie.

Alegem un reper cartezian cu originea în O şi fie m, a, b, c, d, e, f afixele punctelor M, A, B, C, D, E respectiv F. Evident, $|m| = |a| = |b| = |c| = 1$ şi, deoarece triunghiul ABC este echilateral, $a+b+c = 0$. Cum D, E şi F sunt mijloacele segmentelor MA, MB respectiv MC, rezultă că

$$\begin{aligned} MD^2 + ME^2 + MF^2 &= \frac{1}{4}\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(|m-a|^2 + |m-b|^2 + |m-c|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum\left(|m|^2 + |a|^2 - m\bar{a} - \overline{m}a\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(3|m|^2 + \sum|a|^2 - m\cdot\overline{a+b+c} - \overline{m}(a+b+c)\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Soluţie alternativă.

Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC care are centrul de greutate G, are loc relaţia (*Leibniz*):

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2.$$

În cazul nostru, $G = O$, $MA = MB = MC = MG = 1$, prin urmare $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6$. Atunci $MD^2 + ME^2 + MF^2 = \frac{1}{4}\cdot 6 = \frac{3}{2}$.

Soluţie alternativă.

Dacă M este un punct situat pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, atunci are loc relaţia (*Van Schooten*):

$$MA = MB + MC.$$

Egalitatea $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6$, echivalentă cu cea din concluzia problemei, revine la $MB^2 + MC^2 + MB\cdot MC = 3$, iar aceasta rezultă aplicând teorema cosinusului în triunghiul MBC.

Comentarii.

Am primit diverse soluţii ale acestei probleme: trigonometrice, analitice, vectoriale etc. Le-am prezentat pe cele mai directe.