Etapa 5, Problema 3

Determinaţi numărul 4-uplelor (a, b, c, d) de numere naturale nenule cu proprietatea că

$$[a, b, c] = [a, b, d] = [a, c, d] = [b, c, d] = 11^{13} \cdot 13^{11}.$$

(Am notat cu $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$.)

Putnam Competition (prelucrare)

Soluţie.

Fiecare dintre numerele a, b, c, d este de forma $11^{m_i} \cdot 13^{n_i}$, $1 \leq i \leq 4$, unde $0 \leq m_i \leq 13$ şi există măcar două valori ale lui i pentru care $m_i = 13$, iar $0 \leq n_i \leq 11$ şi există măcar două valori ale lui i pentru care $n_i = 11$.

Numărăm 4-uplele de exponenţi (m_1, m_2, m_3, m_4) cu proprietăţile dorite. Avem:

- o 4-uplă în care fiecare m_i este egal cu 13;
- $4 \cdot 13 = 52$ 4-uple în care exact un m_i ia valori în mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$;
- $\binom{4}{2} \cdot 13^2 = 1014$ 4-uple în care exact doi exponenţi m_i iau valori în mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$.

În total, obţinem 1067 4-uple de exponenţi (m_1, m_2, m_3, m_4) .

Procedând similar, găsim $1 + 4 \cdot 11 + \binom{4}{2} \cdot 11^2 = 771$ 4-uple de exponenţi (n_1, n_2, n_3, n_4).

Numărul 4-uplelor (a, b, c, d) cu proprietăţile din enunţ este $1067 \cdot 771 = 822\,657$.