

P3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că

$$f(x+a) - f(x) \leq f(y+a) - f(y) \quad , \quad (\forall)x, y, a \in \mathbb{R}, x \leq y, a \geq 0.$$

a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și orice $k \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$f\left(\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot x + \frac{1}{2^k} \cdot y\right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot f(x) + \frac{1}{2^k} \cdot f(y).$$

b) Arătați că dacă f este monotonă, atunci f este continuă.