Problemă. Numărul prim p are următoarea proprietate: restul r, al împărţirii lui p la 210 este un număr compus şi poate fi reprezentat ca sumă de două pătrate perfecte.

Să se determine numărul r.

Olimpiada Naţională, Republica Moldova

Soluţie. Din enunţ avem

$$p = 210k + r, \qquad r < 210$$

sau

$$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k + r$$

Deoarece p este număr prim rezultă că r nu poate avea în descompunerea sa în factori nici pe 2, nici pe 3, nici pe 5, nici pe 7. În caz contrar, ar rezulta că p este unul din aceste numere, caz 'in care am obţine $k = 0$ şi $p = r$ ceea ce nu se poate deoarece p este număr prim, iar r număr compus.

Atunci $r \in \{11^2;\ 11 \cdot 13;\ 11 \cdot 17;\ 11 \cdot 19;\ 13^2\}$.

Prin calcul se constată că numai $r = 13^2 = 12^2 + 5^2$ se scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule. Deoarece în unele cărţi este considerat şi 0 ca fiind pătrat perfect, probabil că în enunţ trebuia preciazat că este vorba de pătrate perfecte *nenule*. În caz contrar, şi 11^2 se scrie ca $0^2 + 11^2$, deci se găsesc două numere, 121 şi 169, care ar putea eventual îndeplini condiţiile din enunţ. Mai rămâne să arătăm că există numere prime care împărţite la 210 chiar dau aceste resturi. Alegând $k = 1$, găsim numerele $p = 331$ şi $p = 379$ care sunt prime şi dau la împărţirea cu 210 chiar resturile dorite, anume 121 şi respectiv 169.

În concluzie $r \in \{121, 169\}$.