

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

ABSTRACT. Această lecție din ciclul pentru gimnaziu își propune să introducă anumite idei și să demistifice unele concepte combinatorice.

Lecția se adresează claselor VII, VIII, IX.

Data: 4 octombrie 2010.

Autor: Dan Schwarz.

1. INTRODUCERE

Ceea ce se înțelege de obicei prin combinatorică în manualele școlare este mai corect (și uneori chiar astfel) denumit prin sărăcăciosul titlu metode de numărare. Combinatorica este însă cu mult mai diversă în interesele și metodele sale, ajungând să infiltreze, în timpuri recente, mai toate domeniile matematicii, indiferent cât de specializate sau "serioase".

Titlul Ars Combinatoria, legat de catalanul Ramon Llull (Raymond Lully) cât și de marele Gottfried Leibniz, este cel care probabil a dat numele acestei discipline și acestor metode, dar cel care a propulsat-o pe primul plan al firmamentului matematic a fost fără îndoială inegalabilul Pál Erdős.

În viziunea mea, combinatorica este la fel de mult un fel de a gândi și aborda matematica de orice fel, ca și summa tehnicilor sale catalogate.

2. METODE

2.1. Principiul Cutiei. Metoda cea mai celebră prin eficacitate, simplitate, aplicabilitate, și nu în ultimul rând prin numele său (!), este așa-numitul principiu al cutiei (pigeonhole principle în engleză), sau Principiul lui Dirichlet (care nu l-a inventat, nici descoperit, ci folosit și evidențiat ca atare într-una din lucrările sale de teoria numerelor). În enunțul său informal, el afirmă că dacă plasăm un număr de obiecte într-un număr strict mai mic de cutii, măcar una dintre cutii va conține cel puțin două dintre obiecte. Eu zic că nici măcar nu are nevoie de demonstrație, dar dacă vreți una, fie n obiecte și c cutii, cu $n > c$; dacă în final fiecare cutie ar conține cel mult un obiect, atunci împreună ele ar conține cel mult c obiecte, strict mai puțin decât cele n obiecte plasate în cutii.

Există mai multe variante ale acestui principiu, de exemplu afirmația că măcar una dintre cutii va conține cel puțin $\lfloor \frac{n}{c} \rfloor + 1$ obiecte, sau varianta infinită, unde un număr infinit de obiecte sunt plasate într-un număr finit de cutii, și atunci măcar una dintre cutii va conține un număr infinit de obiecte. O formă mai specială, pe care Littlewood a numit-o argument de medie, este că dacă n variabile au suma s (sau, pozitive fiind, produsul p),

atunci măcar una va avea o valoare de cel mult $\frac{s}{n}$ (respectiv $\sqrt[n]{p}$), și evident măcar o alta va avea o valoare de cel puțin $\frac{s}{n}$ (respectiv $\sqrt[n]{p}$).

Aplicațiile acestui principiu abundă; vă invit la sarcina detectivă de a descoperi chiar în cadrul acestei lecții, măcar trei utilizări ale sale (mai mult sau mai puțin ascunse).

2.2. Principiul Elementului Extremal. Un al doilea principiu capital este cel denumit al Elementului Extremal. Pentru totalitatea obiectelor, sau totalitatea configurațiilor propuse de o problemă, se pot deduce, în cele mai multe cazuri, foarte puține adevăruri generale, globale, din ipotezele date, sau altfel problema este banală sau ușoară. Dar dacă ne restrângem la doar unele dintre ele, evidențiate de vreo proprietate specială (foarte des maximalitate sau minimalitate relativ la o măsură oarecare, cum ar fi de exemplu valoare, distanță, arie, etc.), atunci avem șanse mai bune de a căpăta informații mai precise. Ca exemplu, vă propun demonstrația iraționalității lui $\sqrt{2}$, care apare și în lecția de numere reale pentru clasele de liceu, provenind din [1], liber disponibilă în format .pdf la [2]. Este remarcabil că demonstrația nu folosește argumente de divizibilitate (proprietățile determinate de Euclid ale numerelor prime), ci are o aromă combinatorică.

Teorema 1. Numărul $d = \sqrt{2}$ (pentru care $d^2 = 2$) nu este număr rațional.

Demonstrație. Fie $d = \frac{p}{q}$ (p, q întregi pozitivi), cu q minimal. Deoarece $d^2 = 2$, deci $1 < d < 2$, avem atunci $q < p < 2q$, astfel încât

$$\frac{2pq}{pq} = 2, \quad \frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{și} \quad \frac{2pq - p^2}{pq - q^2} = 2 = \frac{p(2q - p)}{q(p - q)}.$$

Astfel $d = \frac{2q-p}{p-q}$. Dar $p < 2q$ și $p - q < q$; deci avem o reprezentare rațională a lui d cu numitorul mai mic decât cel minimal! ■

Metoda așa-numită a Coborârii Infinite a lui Fermat este strâns înrudită cu Principiul Elementului Extremal. Dacă în demonstrația de mai sus oțitem alegerea minimală a lui q , obținem o nouă scriere a lui $d = \frac{2q-p}{p-q} = \frac{p'}{q'}$, cu numitorul q' strict mai mic decât q . Continuând, ca într-o buclă a unui algoritm, obținem numitori pozitivi din ce în ce mai mici, ceea ce nu se poate repeta ad infinitum, căci în cel mult q pași am coborî sub valoarea minimă pozitivă posibilă 1.

3. APLICAȚII

3.1. Aritmetică. Ceea ce micuțul Gauss (spune legenda) a descoperit, dincolo de numărarea propriu-zisă, are farmecul și apelul lucrului simplu dar genial, care trece peste obstacol prin transcenderea lui. Pus la greaua muncă de către învățătorul său de a calcula suma numerelor întregi pozitive de la 1 la 100, Gauss a înșirat numerele pe două rânduri astfel

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100$$

$$100 + 99 + \cdots + 2 + 1$$

și a observat că, două câte două, numerele situate unul sub celălalt, au suma 101. Cum apar 100 de astfel de coloane, și cum suma finală este evident dublul sumei căutate, se calculează valoarea $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. Chiar și în zilele noastre, metoda de a calcula suma S a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice $a, a+r, \dots, a+(n-1)r, \dots$ este aceeași: se adună pe perechi cu cei n termeni scriși în sens invers, și se obține $S = \frac{n(2a+(n-1)r)}{2} = na + \frac{n(n-1)}{2}r$.

Suma S a primilor n termeni ai unei progresii geometrice de rație $q \neq 1$ $a, qa, \dots, q^{n-1}a, \dots$ se calculează cu o metodă derivată din cea de mai sus: mai întâi se înmulțesc toți termenii cu rația q , apoi se scriu decalat cu o poziție

$$S = a + qa + q^2a + \dots + q^{n-2}a + q^{n-1}a$$
$$qS = qa + q^2a + \dots + q^{n-2}a + q^{n-1}a + q^na$$

în final se scad pe perechi, și se obține $S = a \frac{1-q^n}{1-q}$.

Erdős propune următoarea (clasică azi)

Problemă. Fiind date n numere întregi (nu neapărat distincte), să se arate că există unele dintre ele, a căror sumă să fie divizibilă prin n (evident $n-1$ numere nu sunt de ajuns în general, căci le putem alege toate egale cu 1).

Soluție. Dificultatea este că cele $2^n - 1$ posibilități de a alege numerele (combinatorica ne învață de ce atâtea!) sunt prea multe, nu ne descurcăm, și nu ajungem la concluzie. Trucul¹ este de a alege doar câteva dintre posibilități. Fie numerele a_1, a_2, \dots, a_n ; să considerăm sumele $s_0 = 0, s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Printre aceste $n+1$ numere se vor găsi două, fie ele s_i și s_j , cu $0 \leq i < j \leq n$, care să dea același rest la împărțirea prin n . Dar atunci $s_j - s_i$ este divizibil prin n , și evident reprezintă o sumă de numere dintre cele date. \square

Un fapt tipic în problemele de combinatorică este acela că uneori o mică schimbare în condițiile problemei o transformă în mod radical, atât în ceea ce privește dificultatea ei, cât și în metodele folosite. Dacă se dau $2n-1$ numere întregi, și se cere același lucru, dar cu condiția să alegem exact n dintre numere, a căror sumă să fie divizibilă prin n , aceasta devine dificilă teoremă Erdős-Ginzburg-Ziv. Nu voi comenta pentru cazul general decât că $2n-1$ numere sunt în general necesare, căci fiind date doar $2n-2$ numere, ele pot fi $n-1$ dintre ele egale cu 0 și celelalte $n-1$ egale cu 1, și concluzia devine falsă. Cu toate acestea, pentru un caz particular (în speță $n=6$), poate exista o soluție directă simplă.

Problemă. Fiind date 11 numere întregi (nu neapărat distincte), să se arate că există 6 dintre ele, a căror sumă să fie divizibilă prin 6.

¹Cineva a definit metoda ca fiind un truc care a putut fi aplicat de măcar două ori!

Soluție. Este ușor de verificat că dintre orice 3 numere întregi, putem găsi două cu suma pară (acesta este chiar cazul particular $n = 2$), și că dintre orice 5 numere întregi, putem găsi trei cu suma divizibilă prin 3 (acesta este chiar cazul particular $n = 3$).

Acum, fiind date a_1, a_2, \dots, a_{11} , putem presupune că $b_1 = a_1 + a_2$ este par (altfel reindexăm). La fel, putem presupune că $b_2 = a_3 + a_4$ este par, ..., $b_5 = a_9 + a_{10}$ este par. Dintre cei cinci întregi pari b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 , putem deci găsi trei cu suma divizibilă prin 3. Dar suma acestor trei este egală cu suma celor 6 numere a_i care le formează, deci am găsit 6 numere dintre cele date, cu suma divizibilă prin 6. \square

În final, demonstrația mea favorită printre multele cunoscute ale micii teoreme a lui Fermat. Aceeași idee se aplică la generalizarea ei dată de Euler.

Teorema 2. Fie p un număr prim, și a un întreg pozitiv relativ prim cu p . Atunci p divide numărul $a^{p-1} - 1$.

Demonstrație. Să considerăm cele $p - 1$ numere $a, 2a, \dots, (p - 1)a$, fiecare nedivizibil prin p . Pentru oricare două dintre aceste numere, fie ele ja și ia , cu $1 \leq i < j \leq p - 1$, numărul $a_j - a_i = (j - i)a$ este nedivizibil prin p , căci $0 < j - i < p$. Aceasta înseamnă că cele $p - 1$ numere dau resturi distincte și nenule la împărțirea prin p , deci reprezintă toate aceste resturi. Atunci produsul lor $a^{p-1}(p - 1)!$ dă același rest la împărțirea prin p ca și $(p - 1)!$, deci p divide diferența lor $(a^{p-1} - 1)(p - 1)!$, adică p divide numărul $a^{p-1} - 1$. \blacksquare

3.2. Geometrie. Problemele combinatorice din geometrie sunt destul de diferite de cele, să zicem, ale geometriei sintetice. Un exemplu este edificator.

Problemă. Fiind dat un poligon convex cu 9 vârfuri în plan, să se arate că există două diagonale care fac între ele un unghi mai mic de 7° .

Soluție. Calcularea numărului de diagonale este un prim, simplu, exercițiu combinatoric în această problemă. Din fiecare vârf pleacă 6 diagonale; sunt date 9 vârfuri, iar fiecare diagonală este numărată de două ori (câte odată pentru fiecare vârf unde ea are un capăt), deci există $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ diagonale.

Alegem acum un punct P oarecare în plan și ducem prin P câte o dreaptă paralelă pentru fiecare dintre diagonale. Dacă două diagonale sunt paralele, am terminat, căci unghiul făcut între ele este 0° . Dacă nu, în jurul lui P s-au format 54 semidrepte (câte două pentru fiecare diagonală), care împart cele 360° grade din jurul lui P în 54 sectoare. Atunci măcar unul dintre unghiurile formate între două semidrepte consecutive dintr-o parcurgere în sensul acelor de ceasornic va fi cel mult $(\frac{360}{54})^\circ < 7^\circ$. \square

3.3. Teoria Mulțimilor. Problemele combinatorice din teoria mulțimilor sunt printre cele mai apreciate, căci nu presupun nici o tehnică particulară specială a acestui domeniu.

Problemă. Fiind dată o familie (finită sau infinită) $\mathcal{F} = (X_i)_{i \in I}$ de mulțimi cu $|X_i| \leq n$, astfel încât intersecția a oricare $n + 1$ dintre ele este nevidă, atunci intersecția tuturor este nevidă.

Soluție. Fie $A \neq B$ două dintre mulțimi (dacă toate sunt egale, rezultatul este trivial); atunci $0 < |A \cap B| < n$, deci $A \cap B = \{x_1, \dots, x_k\}$, cu $1 \leq k \leq n - 1$. Presupunând rezultatul a fi fals, pentru orice element x_i va exista (cel puțin) o mulțime X_i astfel încât $x_i \notin X_i$ (mulțimile X_i nu sunt neapărat distincte). Dar atunci cele cel mult $n + 1$ mulțimi A, B, X_1, \dots, X_k vor avea intersecție nevidă; fie x un element comun, atunci în mod evident $x \neq x_i$ pentru orice i , dar de asemenea $x \in A \cap B$, absurd. Pe de altă parte, fie o mulțime cu $n + 1$ elemente, și familia celor $n + 1$ submulțimi de câte n elemente fiecare; oricare n dintre ele au intersecția nevidă, dar intersecția tuturor este vidă, ceea ce arată că rezultatul este cel mai bun posibil. Observați similaritatea cu teorema lui Helly. \square

4. ÎNCHEIERE

Vom reveni în lecții ulterioare cu detalii asupra altor metode combinatorice, pentru a suplini paucitatea rezultatelor din manualele școlare, cu atât mai mult cu cât astfel de probleme apar tot mai des în cadrul concursurilor naționale și internaționale. Varietatea combinatoricii este imposibil de cuprins în întregime, dar vom vorbi despre teoria grafurilor, funcții caracteristice, principiul includerii-excluderii și multe altele din colecția de giuvaere ale acestui domeniu favorit. De asemenea, materiale suplimentare și o bibliografie adecvată vor fi disponibile pe acest site.

REFERENCES

- [1] MOSER, LEO, *An Introduction to the Theory of Numbers*, The Trillia Group, (2004).
- [2] THE TRILLIA GROUP, <http://www.trillia.com/moser-number.html>