

Problema 2. Se consideră mulțimile A și B pentru care $\text{card}(A \setminus B) = 10$ și $\text{card}(B \setminus A) = 14$. Știind că reuniunea celor două mulțimi are de cinci ori mai multe elemente decât intersecția lor, determinați numărul de elemente al mulțimilor A și B .

* * *

Soluție: Avem $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$, deci

$$\text{card}A - \text{card}(A \cap B) = 10 \text{ și } \text{card}B - \text{card}(A \cap B) = 14$$

Adunând cele două relații avem

$$\text{card}A + \text{card}B - 2 \cdot \text{card}(A \cap B) = 24. (*)$$

Pe de altă parte $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$, de unde $\text{card}A + \text{card}B = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$ și atunci relația (*) devine

$$\text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) = 24. (**)$$

Cum $\text{card}(A \cup B) = 5 \cdot \text{card}(A \cap B)$, obținem $\text{card}(A \cap B) = 6$.

Acum, din $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$, obținem $\text{card}A = 16$, iar din $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$ obținem $\text{card}B = 20$