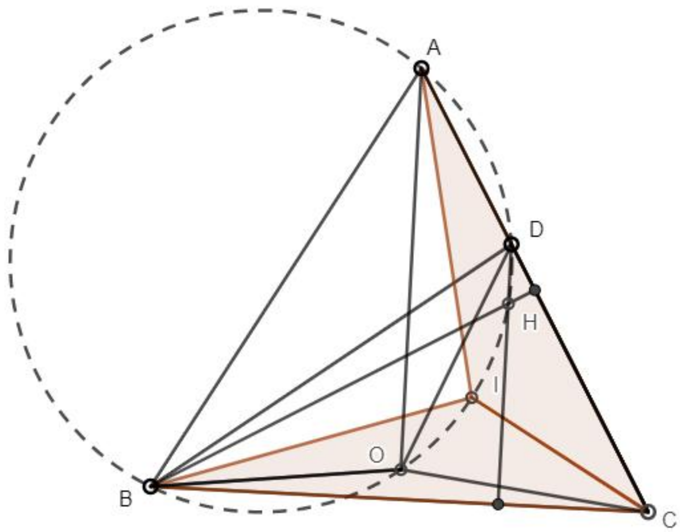
Problema 3.

Fie ABC un triunghi echilateral iar D un punct arbitrar al dreptei AC. Notăm cu O, I și H centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris respectiv ortocentrul triunghiului BCD. Arătați că A, D, H, I, O, B sunt șase puncte conciclice. *(Petru Braica)*



Soluție.

Cazul în care punctul D coincide cu unul din vârfurile A sau B nu intră în discuție întrucât nu avem ce demonstra. Analizăm cazul în care punctul D este pe latura AC a triunghiului echilateral ABC, cazurile în care punctul D se află pe prelungirea laturii AC se tratează la fel.

Vom pivota cu triunghiul ABD arătând inscriptibilitatea patrulaterelor ABOD, ABID respectiv ABHD. Concluzia este apoi imediată.

Astfel patrulaterul ABOD inscriptibil pentru că: $\angle OBA \equiv \angle OCA$ (diferență de unghiuri congrunte, din măsura comună de 60^0 a unghiurilor $\angle ABC$ și $\angle ACB$ scădem măsurile unghiurilor de la baza triunghiului isoscel OBC, $\angle OBC$ cu $\angle OCB$) și $\angle OCA \equiv \angle ODC$ conduce la $\angle OBA \equiv \angle ODC$, deci $\angle OBA$ și $\angle ADO$ sunt suplementare.

Patrulaterul ABID este inscriptibil pentru că $\angle IBC \equiv \angle IAC$ (asta rezultă din cazul LUL pentru triunghiurile IBC și IAC) implică $\angle IBC \equiv \angle IAC$, și, cum $\angle IBC \equiv \angle IBD$, rezultă că $\angle IAD \equiv \angle IBD$.

Patrulaterul ABHD este inscriptibil întrucât m $(\angle BHD) = 180^0$ - m $(\angle BCA) = 120^0 = 180^0$ - m$(\angle BAC)$, adică o pereche de unghiuri opuse ale patrulaterului ABHD sunt suplementare.

Am demonstrat că punctele O, I și H aparțin cercului circumscris triunghiului ABD.

Astfel am arătat că punctele A, B, D, O, I, H sunt conciclice.