COMENTARII ETAPA JUDEŢEANĂ 2012

Abstract. Personal comments on some of the problems presented at the District Round of the National Mathematics Olympiad 2012.
Data: 12 martie 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Etapei Judeţene a Olimpiadei de Matematică 2012, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

Numele autorilor problemelor sunt ţinute subt obroc până la publicarea **RMC 2012**, din motive nu cu totul clare, nici justificate.

2. Clasa a IX-a

Subiectul (1). *Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$[x]^5 + \{x\}^5 = x^5.$$

Notă: prin $[x]$ şi $\{x\}$ se notează partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

Soluţie. Pentru $\{x\} = 0$, adică $x \in \mathbb{Z}$, ecuaţia este trivial îndeplinită. Pentru $\{x\} \neq 0$ avem $\{x\}^5 = (x-[x])(x^4+\cdots+[x]^4)$, adică $\{x\}^4 = x^4+\cdots+[x]^4 \geq [x]^4$, deci trebuie $[x] = 0$. Prin urmare $x \in \mathbb{Z} \cup (0,1)$, care verifică. □

Subiectul (2). *Demonstraţi că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci*

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematică

Soluţie. Să notăm $s = a+b+c$. Din inegalitatea Cauchy-Schwarz avem $((s+a)+(s+b)+(s+c))\left(\frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b} + \frac{1}{s+c}\right) \geq 9$.

[1] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate.

Dar $(s+a)+(s+b)+(s+c) = 4s$, deci $9 \leq 4s\left(\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s+b}+\frac{1}{s+c}\right) = 4\left(3 - \frac{a}{s+a}+\frac{b}{s+b}+\frac{c}{s+c}\right)$, deci $\frac{a}{s+a}+\frac{b}{s+b}+\frac{c}{s+c} \leq \frac{3}{4}$. Egalitatea se obţine pentru $a = b = c$. □

Subiectul (4)**.** *Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale este crescător, neconstant şi are proprietatea: a_n divide n^2, oricare ar fi $n \geq 1$. Arătaţi că una dintre următoarele afirmaţii este adevărată:*

- *există un număr natural n_1 astfel încât $a_n = n$ pentru orice $n \geq n_1$;*
- *există un număr natural n_2 astfel încât $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq n_2$.*

Soluţie. Este puţin caraghios, pentru mine, faptul că pragul de la care se cere să se arate că $a_n = n$ sau $a_n = n^2$ a fost notat cu simboluri diferite n_1, respectiv n_2. În fapt, problema cere să se arate că există un prag N astfel încât, pentru $n \geq N$, să avem fie tot timpul $a_n = n$, fie tot timpul $a_n = n^2$.

Problema este chiar foarte simpatică. Dacă există un indice m pentru care $a_m > m$, atunci vom avea şi $a_m > m + 1$, căci $a_m \mid m^2$ dar $m + 1$ şi m^2 sunt coprime. Rezultă că $a_{m+1} \geq a_m > m + 1$, deci $a_n > n$ pentru orice $n \geq m$. Pentru un astfel de $N > 2$ prim însă, acest lucru implică $a_N = N^2$. Atunci însă, dacă $a_n = n^2$ pentru un $n \geq N$, avem

$$n^2 = a_n \leq a_{n+1} \mid (n+1)^2,$$

de unde $a_{n+1} = (n+1)^2$, căci altfel $a_{n+1} \leq (n+1)^2/2 < n^2 = a_n$, absurd. În acest caz, afirmaţia a doua este deci adevărată.

Dacă dimpotrivă, avem $a_m \leq m$ pentru orice m, şirul fiind crescător şi neconstant, există un rang de la care termenii sunt strict mai mari decât 1. Atunci pentru un astfel de N prim vom avea $a_N = N$. Dar dacă $a_n = n$ pentru un $n \geq N$, atunci $n = a_n \leq a_{n+1} \leq n + 1$, şi $a_{n+1} \mid n + 1$ implică $a_{n+1} = n + 1$, căci n şi $n + 1$ sunt coprime. În acest caz, prima afirmaţie este deci adevărată. □

3. Clasa a X-a

Subiectul (1)**.** *Fie $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea*

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$. Demonstraţi că f este mărginită şi periodică, iar funcţia $g \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = x + f(x)$ este monotonă.

Soluţie. Din inegalitatea modulului avem $|f(x)| \leq |f(y)| + |\sin x - \sin y| \leq |f(y)| + 2$, deci fixând y se vede că f este mărginită. Alegând $y = x + 2\pi$ rezultă $|f(x) - f(x + 2\pi)| \leq 0$, deci f este periodică, de perioadă 2π.

Afirmaţia din soluţia oficială, că din $|\sin x| \leq |x|$ rezultă $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, merită a fi detaliată. Avem $|\sin x - \sin y| = \left|2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}\right| \leq$

$2\left|\sin\dfrac{x-y}{2}\right| \leq |x-y|$, şi totul e bine. Prin urmare, pentru $x \geq y$, avem $f(x)-f(y) \geq y-x$, deci $g(x) = f(x)+x \geq f(y)+y = g(y)$, de unde rezultă că funcţia g este crescătoare. □

O astfel de funcţie, cu $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$ pentru orice x, y, este un caz particular de funcţie lipschitziană (numită non-expansivă), ceea ce îi asigură (uniform) continuitatea. **Problema 5.** din **RMC 2011** (Putnam Seniors) consideră chiar o funcţie f reală cu proprietatea $|f(x)-f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$, cerând să se arate că ecuaţia $f(x) = x$ are o soluţie unică c, şi că şirul iteratelor lui f asupra punctului 0 converge la c.

Subiectul (2)**.**

a) Determinaţi toate soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x = x + 1$*;*

b) Se consideră funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$f(f(x)) = 2^x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$*. Demonstraţi că* $f(0) + f(1) = 1$*.*

Gazeta Matematică

Soluţie.

a) Punctul ajutător admite mai multe justificări posibile. Argumentul din soluţia oficială intersecţia graficului unei funcţii convexe cu o dreaptă constă în cel mult două puncte omite specificarea strict convexe, altfel fiind în mod evident o afirmaţie incorectă. Mi s-a spus că a face această observaţie este ”a căuta nod în papură”; părerea mea este că, în matematică, a accepta astfel de afirmaţii incomplete este un drum posibil spre eroare şi îndoială.

O argumentare alternativă se poate prezenta prin invocarea inegalităţii (generalizate) a lui Bernoulli

Pentru $r \neq 0$*,* $r > -1$*, avem* $(1+r)^x > 1 + xr$ *pentru* $x < 0$
sau $x > 1$*, şi* $(1+r)^x < 1 + xr$ *pentru* $0 < x < 1$*.*

Nu avem decât a scrie $2^x = (1+1)^x$.

Desigur, pentru cei ce stăpânesc deja rudimente de analiză reală, derivata funcţiei reale $\phi(x) = 2^x - (x+1)$ este $\phi'(x) = 2^x \ln 2 - 1$, cu rădăcină unică $\rho = -\dfrac{\ln\ln 2}{\ln 2}$; atunci ϕ este descrescătoare pe $(-\infty, \rho]$ şi crescătoare pe $[\rho, \infty)$. Cum $\phi(0) = \phi(1) = 0$, acestea sunt singurele rădăcini.

b) $f(f(0)) = 2^0 - 1 = 0$, deci $f(f(f(0))) = f(0)$ şi încă $f(f(f(0))) = 2^{f(0)} - 1$, deci $2^{f(0)} = f(0) + 1$.

$f(f(1)) = 2^1 - 1 = 1$, deci $f(f(f(1))) = f(1)$ şi încă $f(f(f(1))) = 2^{f(1)} - 1$, deci $2^{f(1)} = f(1) + 1$.

Deoarece ecuaţia $2^x = x + 1$ are exact două soluţii reale, anume 0 şi 1, rezultă că $f(0)+f(1) = 1$, căci nu putem avea $f(0) = f(1)$; atunci ar rezulta $0 = f(f(0)) = f(f(1)) = 1$, absurd (oricum, f rezultă injectivă din $f \circ f$ injectivă).

Chestiunea dacă astfel de funcţii există nu este chiar trivială. Ar trebui investigat cum se poate defini o astfel de funcţie reală, pentru ca universul problemei să nu fie vid. □

Ca multe alte probleme din Gazeta Matematică, recent postate pe site-ul AoPS `www.mathlinks.ro` de către cititori dornici de a obţine o soluţie fără efort, şi aceasta apare, din data de 26 decembrie 2011, şi primeşte soluţie.

Subiectul (3). *Fie şirul de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_n \leq n$, pentru orice $n \geq 1$ şi*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{\pi a_k}{n} = 0,$$

pentru orice $n \geq 2$.

a) Aflaţi a_2.

b) Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ în funcţie de $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Evident $a_1 = 1$, căci pentru $n = 2$ avem $\cos\frac{\pi a_1}{2} = 0$, sub condiţia $a_1 \in \{0, 1\}$. Pentru $n = 3$ avem $\cos\frac{\pi a_1}{3} + \cos\frac{\pi a_2}{3} = 0$, adică $\cos\frac{\pi a_2}{3} = -\frac{1}{2}$, ceea ce sub condiţia $a_2 \in \{0, 1, 2\}$ duce la $a_2 = 2$.

Emitem ipoteza de inducţie $a_k = k$ pentru orice $1 \leq k \leq n-1$; de unde

$$\cos\frac{\pi a_n}{n+1} = -\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{\pi a_k}{n+1} = -\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{n+1}.$$

Considerăm ~~umărul~~ numărul $z = \cos\frac{\pi}{n+1} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n+1}$, ca de obicei pentru a estima astfel de sume. Atunci $z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{z - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}$. Dar $|z| = 1$, aşadar $\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)(\overline{1-z})} = \frac{z-\overline{z}}{|1-z|^2}$ este pur imaginar.

Atunci $\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{n+1} = 0$, de unde $\cos\frac{\pi a_k}{n+1}$ $\cos\frac{\pi a_n}{n+1} = \cos\frac{n\pi}{n+1}$, ceea ce sub condiţia $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$ duce la $a_n = n$. □

Un argument elegant, dat în concurs de Ştefan Gramatovici, este că relaţia de recurenţă determină în mod unic pe $\cos\frac{\pi a_n}{n+1}$; şi cum $0 \leq a_n \leq n$, aceasta determină în mod unic pe a_n, căci funcţia cos este injectivă pe $[0, \pi]$. Este suficient atunci de arătat că şirul $a_n = n$ satisface relaţia, iar acest lucru se demonstrează ca mai sus.

Subiectul (4). *Fie a şi b două numere raţionale astfel încât numărul complex $z = a + ib$ să aibă modulul 1.*

Arătaţi că modulul numărului complex $z_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ este un număr raţional pentru orice n impar.

Soluţie. Pentru $z = 1$ totul e clar, iar pentru $z \neq 1$ avem $z_n = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$. Pe de altă parte $z = a + ib$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$, şi putem lua $a = \cos\theta$ şi $b = \sin\theta$ pentru un $\theta \in (0, 2\pi)$ (aceste puncte sunt date de tripletele pitagoreice). Atunci

$$z_n = \frac{2\mathrm{i}\sin(n\theta/2)}{2\mathrm{i}\sin(\theta/2)} \cdot \frac{\cos(n\theta/2) + \mathrm{i}\sin(n\theta/2)}{\cos(\theta/2) + \mathrm{i}\sin(\theta/2)},$$

deci $|z_n| = |\sin(n\theta/2)|/|\sin(\theta/2)|$. Pentru $n = 2k + 1$ impar avem însă $\sin(n\theta/2) = \sin k\theta\cos(\theta/2) + \cos k\theta\sin(\theta/2)$.

Dar din formula lui de Moivre şi binomul lui Newton rezultă că atât $\cos k\theta$ cât şi $\sin k\theta$ sunt numere raţionale; de asemenea $\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$ este număr raţional. Punând toate acestea laolaltă, rezultă $|z_n| \in \mathbb{Q}$. □

4. Clasa a XI-a

Subiectul (1)**.** *Pentru un număr real $a > 1$ dat, considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi, pentru orice $n \geq 1$,*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1}.$$

Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.

Gazeta Matematică

Soluţie. Să notăm $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \cdots x_n$, deci $s_1 = x_1 = a > 1$. Din $s_n > 1$ (adevărat pentru $n = 1$) rezultă $s_{n+1} - s_n = x_{n+1} = \dfrac{s_n}{s_n - 1} > 0$, aşadar $s_{n+1} > s_n > 1$, şi deci prin inducţie $s_n > 1$ pentru orice $n \geq 1$. Fiind crescător, şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ are limită; dacă această limită ar avea valoare finită $\ell \geq a > 1$, atunci am avea $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{s_n - 1} = \dfrac{\ell}{\ell - 1}$, de unde $\ell = 0$, absurd, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Dar atunci, şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ fiind crescător, din $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{s_n - 1}$ rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{s_n - 1}\right) = 1$. □

Subiectul (3)**.** *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricile matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ având proprietatea că $A \cdot B^2 = A - B$ $AB^2 = A - B$.*

a) Arătaţi că matricea $I_n + B$ este inversabilă;

b) Arătaţi că $AB = BA$.

Soluţie. Relaţia $AB^2 = A - B$ se factorizează atât $(AB - A + I_n)(I_n + B) = I_n$, cât şi $(AB + A + I_n)(I_n - B) = I_n$, forţând $I_n + B$ şi $I_n - B$ inversabile. Dar atunci $A = (I_n - (I_n + B)^{-1})(I_n - B)^{-1}$, deci A comută cu B, căci membrul drept este un polinom în B (din relaţiile Hamilton-Cayley). Mai pedestru, având şi $(I_n + B)(AB - A + I_n) = I_n$, aceasta se scrie $(AB - BA)(I_n - B) = 0_n$, de unde prin înmulţirea cu $(I_n - B)^{-1}$ se obţine $AB - BA = 0_n$. □

5. Clasa a XII-a

Subiectul (3)**.** *Fie G un grup finit notat multiplicativ cu n elemente şi fie e elementul său neutru. Să se determine toate funcţiile $f\colon G \to \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc simultan următoarele două condiţii:*

(a) $f(x) = 1$ dacă şi numai dacă $x = e$; şi

(b) $f(x^k) = f(x)/(f(x), k)$, pentru orice divizor natural k al lui n, unde (r, s) este cel mai mare divizor comun al numerelor naturale r şi s.

Gazeta Matematică

Soluţie. Fie $\nu(x)$ ordinul unui element $x \in G$. Din teorema lui Lagrange, $\nu(x) \mid |G| = n$, deci putem scrie $1 = f(e) = f(x^{\nu(x)}) = f(x)/(f(x), \nu(x))$, aşadar $f(x) \mid \nu(x)$. Dar atunci $f(x) \mid n$, deci putem scrie $f(x^{f(x)}) = f(x)/(f(x), f(x)) = 1$, aşadar $x^{f(x)} = e$, prin urmare $\nu(x) \mid f(x)$.

Rezultă că $f(x) = \nu(x)$. Invers, într-adevăr avem atunci $\nu(x) = 1$ dacă şi numai dacă $x = e$, căci e este singurul element de ordin 1. Apoi, egalitatea $\nu(x^k)(\nu(x), k) = \nu(x)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul k, nu doar pentru divizorii naturali ai lui n; un rezultat cunoscut şi demonstrabil direct din definiţia ordinului unui element. □

Şi această problemă din Gazeta Matematică a fost, extrem de recent, postată pe site-ul AoPS `www.mathlinks.ro`, din data de 5 martie 2012, şi a primit soluţie.

Subiectul (4)**.** *Fie $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, astfel încât $f(0) = f(1) = 0$ şi $|f'(x)| \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Să se arate că*

$$\left| \int_0^1 f(t)\, dt \right| < \frac{1}{4}.$$

Soluţie. În limbaj profan, din condiţiile date graficul funcţiei f este cuprins în rombul de vârfuri $(0, 0), (1/2, 1/2), (1, 0), (1/2, -1/2)$. Prin urmare vom avea chiar $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{4}$, aria unei jumătăţi de romb. Inegalitatea este strictă deoarece un "acoperiş" este nediferenţiabil în apexul său. Tehnic vorbind, toate acestea decurg din teorema lui Lagrange.

Ultima frază din soluţia oficială – Cum $f(1/2) = \pm 1/2$ şi f este derivabilă în $1/2$, rezultă f derivabilă în $1/2$; contradicţie trebuie citită $|f|$ derivabilă în $1/2$; contradicţie (cu $|f(t)| = t$ pe $[0, 1/2]$ şi $|f(t)| = 1 - t$ pe $[1/2, 1]$). □

6. Încheiere

Ce pot spune? Nu sunt prea mulţumit de calitatea problemelor şi/sau soluţiilor propuse. Îngrijorătoare este prevalenţa ridicată a erorilor de limbă, sau notaţie. Lucrările nu au fost prea bine balansate; în general nivelul de dificultate nu a fost prea ridicat, dar e timp pentru lucrări mai grele la Olimpiada Naţională! Mult succes celor calificaţi!