Clasa a IX-a - Etapa 5 - Problema 1

Fie triunghiul $\triangle ABC$ *şi punctele* $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$ *astfel încât* $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. *Fie* G_1, G_2, G_3 *centrele de greutate ale* $\triangle AMP, \triangle BNM, \triangle CPN$. *Pentru orice punct* X *din plan demonstraţi inegalitatea* $3XG < XG_1 + XG_2 + XG_3 < XA + XB + XC$, *unde* G *este centrul de greutate al* $\triangle ABC$.

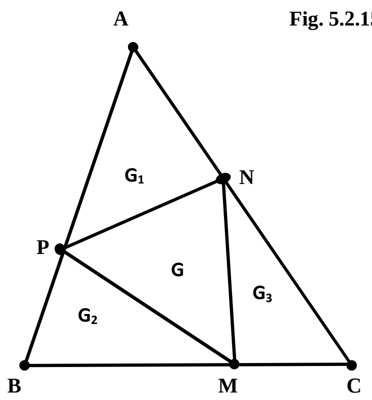

Fig. 5.2.15

Soluţie: Fie valoarea comună a celor trei rapoarte din enunţ. Atunci $\overrightarrow{XM} = \frac{\overrightarrow{XA} + k\overrightarrow{XB}}{1+k}$, $\overrightarrow{XN} = \frac{\overrightarrow{XB} + k\overrightarrow{XC}}{1+k}$, iar $\overrightarrow{XP} = \frac{\overrightarrow{XC} + k\overrightarrow{XA}}{1+k}$.

Apoi $\overrightarrow{XG_1} = \frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XP}}{3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{XA} + \frac{k}{3(1+k)}\overrightarrow{XB} + \frac{1}{3(1+k)}\overrightarrow{XC}$.

Deducem atunci $XG_1 < \frac{2}{3}XA + \frac{k}{3(1+k)}XB + \frac{1}{3(1+k)}XC$. Analog, $\overrightarrow{XG_2} = \frac{\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN}}{3} = \frac{1}{3(1+k)}\overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{k}{3(1+k)}\overrightarrow{XC}$ şi apoi $XG_2 < \frac{1}{3(k+1)}XA + \frac{2}{3}XB + \frac{k}{3(1+k)}XC$. Cele două inegalităţi le adunăm cu $XG_3 < \frac{k}{3(1+k)}XA + \frac{1}{3(1+k)}XB + \frac{2}{3}XC$ care se deduce analog şi atunci avem $XG_1 + XG_2 + XG_3 < XA + XB + XC$. Însumând relaţiile vectoriale corespunzătoare lui $\overrightarrow{XG_1}, \overrightarrow{XG_2}, \overrightarrow{XG_3}$ obţinem $\overrightarrow{XG_1} + \overrightarrow{XG_2} + \overrightarrow{XG_3} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XG}$ şi atunci evident avem şi $3XG < XG_1 + XG_2 + XG_3$.■