Clasa a X-a - Etapa IV - Problema 3

Enunţ. Determinaţi toate soluţiile din $[0, \infty)$ ale ecuaţiei

$$7^x + 3^x = 5^x + 4^x.$$

Soluţie. Ecuaţia este echivalentă cu $7^x - 5^x - 4^x + 3^x = 0$. Vom demonstra că funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7^x - 5^x - 4^x + 3^x$ este strict crescătoare. Într-adevăr avem

$$\begin{aligned} & 7^x - 5^x - 4^x + 3^x \\ = \; & 5^x \left(\left(\frac{7}{5} \right)^x - 1 \right) - \left(\frac{20}{7} \right)^x \left(\left(\frac{7}{5} \right)^x - 1 \right) - \left(\frac{20}{7} \right)^x + 3^x \\ = \; & \left(\left(\frac{7}{5} \right)^x - 1 \right) \left(5^x - \left(\frac{20}{7} \right)^x \right) + \left(\frac{20}{7} \right)^x \left(\left(\frac{21}{20} \right)^x - 1 \right) \\ = \; & \left(\frac{20}{7} \right)^x \left(\left(\frac{7}{5} \right)^x - 1 \right) \left(\left(\frac{35}{20} \right)^x - 1 \right) + \left(\frac{20}{7} \right)^x \left(\left(\frac{21}{20} \right)^x - 1 \right). \end{aligned}$$

Cum, pentru orice $a > 1$, funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = a^x - 1$ este strict crescătoare şi pozitivă, atunci f este strict crescătoare ca sumă şi produs de funcţii strict crescătoare şi pozitive.

Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel mult o soluţie. Se obţine concluzia $S = \{0\}$. □