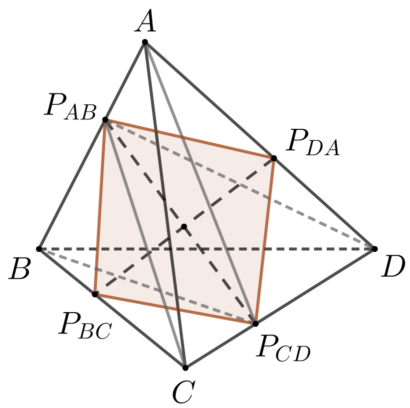
Problema 3. a) Fie P_{AB}, P_{BC}, P_{CD} şi P_{DA} puncte pe muchiile (AB), (BC), (CD), respectiv (DA) ale unui tetraedru $ABCD$.
Arătaţi că planele $(P_{AB}CD)$, $(P_{BC}DA)$, $(P_{CD}AB)$ şi $(P_{DA}BC)$ au un punct comun dacă şi numai dacă are loc relaţia

$$\frac{AP_{AB}}{P_{AB}B}\cdot\frac{BP_{BC}}{P_{BC}C}\cdot\frac{CP_{CD}}{P_{CD}D}\cdot\frac{DP_{DA}}{P_{DA}A}=1.$$

(*Teorema lui Ceva în spaţiu*)

b) Fie P_{AB}, P_{BC}, P_{CD}, P_{DA}, P_{AC} şi P_{BD} puncte pe muchiile (AB), (BC), (CD), (DA), (AC), respectiv (BD) ale unui tetraedru $ABCD$ cu proprietatea că există punctele $\{A'\}=BP_{CD}\cap CP_{BD}\cap DP_{BC}$, $\{B'\}=AP_{CD}\cap CP_{DA}\cap DP_{AC}$, $\{C'\}=AP_{BD}\cap BP_{DA}\cap DP_{AB}$ şi $\{D'\}=AP_{BC}\cap BP_{AC}\cap CP_{AB}$.
Demonstraţi că dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt concurente.

Soluţie:
a) Planele $(P_{AB}CD)$ şi $(P_{CD}AB)$ se taie după o dreaptă. Cum P_{AB}, P_{CD} se află în ambele plane, dreapta de intersecţie a celor două plane este dreapta $P_{AB}P_{CD}$. Similar, planele $(P_{BC}DA)$ şi $(P_{DA}BC)$ se taie după dreapta $P_{BC}P_{DA}$. Prin urmare, cele patru plane au un punct comun dacă şi numai dacă dreptele $P_{AB}P_{CD}$ şi $P_{BC}P_{DA}$ au un punct comun, adică dacă punctele P_{AB}, P_{BC}, P_{CD} şi P_{DA} sunt coplanare. Conform teoremei lui Menelaus în spaţiu şi a reciprocei sale, condiţia de coplanaritate a punctelor P_{AB}, P_{BC}, P_{CD} şi P_{DA} este echivalentă cu relaţia din enunţ.



b) Din teorema lui Ceva aplicată în triunghiurile ABD şi BCD rezultă
$\dfrac{AP_{AB}}{P_{AB}B}\cdot\dfrac{BP_{BD}}{P_{BD}D}\cdot\dfrac{DP_{DA}}{P_{DA}A}=1$ şi $\dfrac{BP_{BC}}{P_{BC}C}\cdot\dfrac{CP_{CD}}{P_{CD}D}\cdot\dfrac{DP_{BD}}{P_{BD}B}=1.$

Înmulţind aceste două relaţii obţinem că $\frac{AP_{AB}}{P_{AB}B} \cdot \frac{BP_{BC}}{P_{BC}C} \cdot \frac{CP_{CD}}{P_{CD}D} \cdot \frac{DP_{DA}}{P_{DA}A} = 1$. Conform a), acest lucru arată că dreptele $P_{AB}P_{CD}$ şi $P_{BC}P_{DA}$ au un punct comun, X. Acel punct se află atât în planul (ABP_{CD}) (care conţine $P_{AB}P_{CD}$), cât şi în planul (ADP_{BC}) (deoarece acesta conţine dreapta $P_{BC}P_{DA}$), prin urmare se află şi pe dreapta lor de intersecţie, AA'.
Analog, $X \in (BCP_{DA}) \cap (ABP_{CD}) = BB'$, $X \in (CDP_{AB}) \cap (BCP_{DA}) = CC'$ şi $X \in (CDP_{AB}) \cap (ADP_{BC}) = DD'$. Aşadar, $X \in AA' \cap BB' \cap CC' \cap DD'$, adică cele patru drepte sunt concurente în punctul X.

Remarcă:
Analog se arată că dreapta $P_{AC}P_{BD}$ intersectează fiecare din dreptele $P_{AB}P_{CD}$ şi $P_{BC}P_{DA}$. Dacă notăm cu Y, respectiv Z, cele două puncte de intersecţie, la fel ca mai sus se arată că $Y, Z \in AA' \cap BB' \cap CC' \cap DD'$, condiţie care arată că $X = Y = Z$, adică dreptele $P_{AC}P_{BD}$, $P_{AB}P_{CD}$ şi $P_{BC}P_{DA}$ sunt concurente.