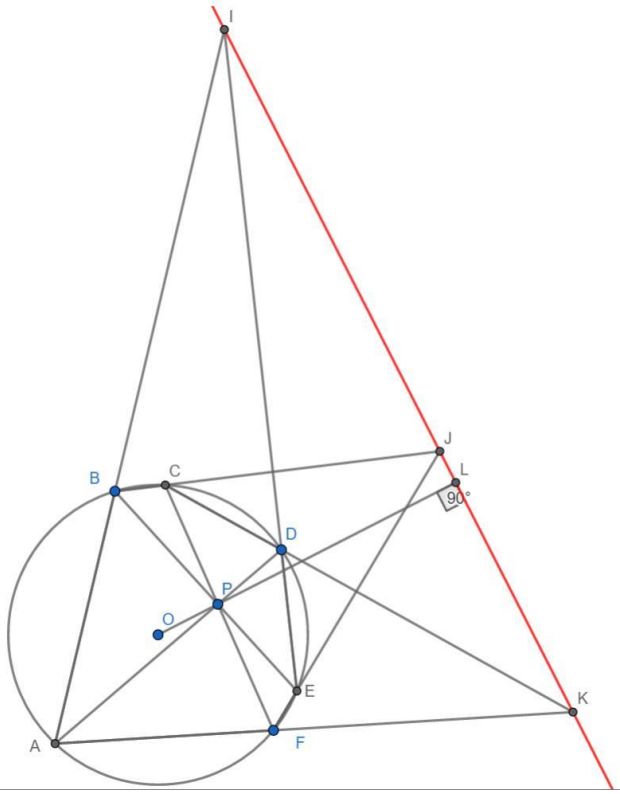
Problema 4. Se consideră două hexagoane neregulate, inscriptibile în cercuri circumscrise concentrice, având fiecare diagonalele mari concurente respectiv în două puncte interioare cercului mic. Demonstrați că cele două hexagoane au dreptele Pascal asociate paralele dacă și numai dacă dreapta determinată de punctele de concurență ale diagonalelor celor două hexagoane trece prin centrul comun celor două cercuri circumscrise.

(Petru Braica, SM)

Soluție. Este suficient să demonstrăm următoarea proprietate legată de hexagoanele inscriptibile având diagonalele concurente:

Lema. Se consideră un hexagon inscriptibil ABCDEF, având diagonalele (mari) AD, BE, CF respectiv AD concurente în P. Demonstrați că dreapta OP este perpendiculară pe dreapta Pascal asociată hexagonului, unde O este centrul cercului circumscris hexagonului. (Petru Braica)



Soluție lema. Este nevoie de câteva noțiuni geometrie proiectivă. Astfel fie un punct M în planul unui cerc $\mathscr{C}$(O:R), iar o dreaptă care conține punctul M taie cercul $\mathscr{C}$, după punctele M_1, respectiv M_2. Se numește conjugatul armonic al lui M în raport cu cercul $\mathscr{C}$, un punct P care este conjugatul armonic al lui M în raport cu punctele M_1, și M_2, adică, folosind segmente orientate: $\frac{\overrightarrow{PM_1}}{\overrightarrow{PM_2}} = -\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overrightarrow{MM_2}}$. . Legat de această noțiune are loc următorul rezultat atribuit lui *Poncelet*: Mulțimea conjugatelor unui punct față de un cerc este o dreaptă perpendiculară pe diametrul cercului care trece prin punctul respectiv. Dreapta perpendiculară pe diametrul OM, unde M este un punct fixat în planul cercului

se numește polara lui M față de cercul $\mathscr{C}$. Putem defini în mulțimea punctelor planului relația $\mathscr{R}$ astfel A$\mathscr{R}$B dacă punctul A aparține polarei lui B în raport cu cercul $\mathscr{C}$**.** Matematicianul francez *La Hire* demonstrează simetria acestei relații. Acum putem trece la rezolvarea efectivă a problemei. Punctul de concurență a diagonalelor mari, notat cu P, aparține polarei punctului K față de cercul circumscris hexagonului. În baza teoremei lui Le Hire, deducem că punctul K aparține polarei lui P față de același cerc. Analog deducem că punctele J și I aprțin și ele polarei punctului P față de cerc. De aici deducem concluzia problemei, OP este perpendiculară pe dreapta KI, ceea ce trebuia demonstrat.

Revenim acum la soluția problemei. Din unicitatea perpendicularei din centrul comun al cercurilor circumscrise pe cele două drepte Pascal, obținem paralelismul cerut.