Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale n care au cel puţin patru divizori naturali şi care sunt egale cu suma pătratelor celor mai mici patru divizori naturali ai lor.

Olimpiadă Iran, 1999

Soluţie:
Fie n un număr cu proprietatea din enunţ şi $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ cei mai mici patru divizori naturali ai săi. Dacă n este impar, d_1, d_2, d_3, d_4 sunt impare, deci $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ este par, contradicţie. Aşadar $d_2 = 2$. Deoarece un pătrat perfect dă restul 0 sau 1 la împărţirea cu 4, dacă $4 \mid n$ atunci $d_3 = 4$ sau $d_3 = 3$ şi $d_4 = 4$ dar în niciunul din cazuri nu obţinem $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ divizibil cu 4. Rezultă că 4 nu divide n. Atunci cei mai mici patru divizori ai săi sunt fie $1, 2, p, q$ unde p, q sunt două numere prime distincte, fie $1, 2, p, 2p$. În primul caz $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ este impar, ceea ce nu convine. Rămâne cazul al doilea, în care $n = 1 + 4 + p^2 + 4p^2 = 5(1 + p^2)$, deci $5 \mid p$. Deducem că $d_3 \in \{3, 5\}$. În primul caz, $n = 1 + 2^2 + 3^2 + 6^2$ nu este divizibil cu 3, deci acest caz nu convine. Dacă $d_3 = 5$, atunci $n = 1 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$ ai cărui cei mai mici patru divizori naturali sunt într-adevăr 1, 2, 5 şi 10.