Clasa a X-a - Etapa 6 - Problema 4

Enunţ: *Se consideră mulţimea*

$$\mathcal{M} = \left\{ (x,y) \middle| x,y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2y \le 0 \right\}$$

şi funcţia

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y.$$

Determinaţi $\max f$.

Soluţie. Din $x^2 + y^2 - 2y \le 0$ obţinem $x^2 + (y-1)^2 \le 1$, adică $\mathcal{M}$ reprezintă un disc de centru $B(0,1)$ şi rază 1. Apoi $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y$ $= (x-3)^2 + (y-5)^2 - 34$. Dacă notăm $M(x,y)$, unde $(x,y) \in \mathcal{M}$ şi $A(3,5)$, avem $f(x,y) = MA^2 - 34$. Deci $\max f$ se obţine când MA este maxim.

Dar $MA \le MB + AB = MB + 5 \le 6$. Valoarea maximă se obţine când A, B, M sunt coliniare, adică M este punctul de intersecţie al cercului $\mathcal{C}(B,1)$ cu dreapta AB.