Determinaţi mulţimea numerelor naturale nenule n pentru care numărul

$$(n+1)^{n-1}+(n-1)^{n+1}$$

este divizibil cu n^2.

* * *

Soluţia 1. Evident condiţia este satisfăcută pentru $n=1$. În continuare presupunem $n \geq 2$.
Deoarece $(n+1)^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, iar $(n-1)^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} \pmod{n}$, pentru ca numărul $(n+1)^{n-1}+(n-1)^{n+1}$ să fie divizibil măcar cu n, trebuie ca $1+(-1)^{n+1}=0$, deci n să fie par.
Vom arăta că pentru orice număr par n, numărul $(n+1)^{n-1}+(n-1)^{n+1}$ este divizibil cu n^2.
Avem că $(n+1)^{n-1}-1=(n+1-1)\big((n+1)^{n-2}+(n+1)^{n-3}+\cdots+(n+1)+1\big)=n\big((M_n+1)+(M_n+1)+\cdots+(M_n+1)+1\big)=n(M_n+n-1)=M_{n^2}-n$.
Similar, $(n-1)^{n+1}+1=(n-1+1)\big((n-1)^n-(n-1)^{n-1}+\cdots-(n-1)+1\big)=n\big((M_n+1)-(M_n-1)+\cdots-(M_n-1)+1\big)=n(M_n+n+1)=M_{n^2}+n$.
Adunând aceste două relaţii rezultă concluzia.
În concluzie, mulţimea căutată este formată din 1 şi numerele naturale nenule pare.

Soluţia 2. Această a doua soluţie se bazează pe o formulă care dă o informaţie mai precisă decât formula $(a+b)^n=M_a+b^n$, anume:

$$(a+b)^n=M_{a^2}+nab^{n-1}+b^n.$$

Pentru $n=0$ şi $n=1$ relaţia este evidentă. Pentru $n \geq 2$ această formulă se demonstrează pe aceeaşi idee care a fost folosită în materialul teoretic pentru justificarea formulei $(a+b)^n=M_a+b^n$. Dacă scriem $(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ şi desfacem parantezele vom obţine diverşi termeni de forma a^kb^{n-k}. Fiecare termen provine dintr-o alegere, a sau b, din fiecare paranteză. Vom avea un singur termen cu b^n, anume acela în care din fiecare paranteză a fost ales b. Câţi termeni cu ab^{n-1} avem? Aceşti termeni provin din alegerea lui b din fiecare paranteză, cu o excepţie, o paranteză din care a fost ales termenul a. Această paranteză din care îl luăm pe a poate fi aleasă în n moduri (poate fi oricare din cele n paranteze), aşa încât vom avea n termeni ab^{n-1}. Aşadar suma termenilor care conţin cel mult un factor a este b^n+nab^{n-1}. Toţi ceilalţi termeni conţin măcar doi factori a, prin urmare sunt divizibili cu a^2. Rezultă că $(a+b)^n=M_a^2+nab^{n-1}+b^n$.

Să trecem acum la rezolvarea problemei:
Folosind formula dedusă mai sus, avem:
$(n+1)^{n-1}=M_{n^2}+(n-1)n\cdot 1^{n-2}+1^{n-1}=M_{n^2}-n+1$ şi $(n-1)^{n+1}=M_{n^2}+(n+1)n\cdot(-1)^n+(-1)^{n+1}$ adică $M_{n^2}+n-1$ dacă n este par şi $M_{n^2}-n+1$ dacă n este impar.

Adunând aceste două relaţii obţinem că $(n+1)^{n-1}+(n-1)^{n+1}$ este M_{n^2} dacă n este par şi este $M_{n^2}-2n+2$ dacă n este impar.
De aici rezultă că orice n par satisface condiţia din enunţ. Dintre valorile impare ale lui n convine numai $n=1$, in caz contrar $(n+1)^{n-1}+(n-1)^{n+1}=M_{n^2}-2n+2$ nefiind divizibil cu n.