Serii de puteri şi funcţii generatoare

lect.dr. Mihai Chiş
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea de Vest din Timişoara

1 Serii de puteri

Definiţie 1.1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale, iar $a \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare fixat. Seria de puteri centrată în a cu coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$, este

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n .$$

Mulţimea de convergenţă a acestei serii este

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R} | \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n - \text{convergentă} \right\}.$$

Observaţie 1.2. 1) Mulţimea $\mathcal{K}$ este nevidă, deoarece $a \in \mathcal{K}$.
2) Fie $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$ şi $\delta = |x_0 - a|$. Folsind criteriile de comparaţie rezultă atunci că

$$x_0 \in \mathcal{K} \Longrightarrow (a-\delta, a+\delta) \subseteq \mathcal{K},$$

respectiv

$$x_0 \notin \mathcal{K} \Longrightarrow \mathcal{K} \subseteq (a-\delta, a+\delta).$$

Teoremă 1.3. (Abel-Cauchy-Hadamard)
Pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *există un numărreal* $R \in [0,\infty]$ *(numit rază de convergenţă) cu proprietatea că*

$$(a-R, a+R) \subseteq \mathcal{K} \subseteq [a-R, a+R].$$

În plus, convergenţa este absolută şi uniformă pe orice interval $(a-r, a+r) \subset (a-R, a+R)$. *Raza de convergenţă* R *este dată de* $R = \frac{1}{\omega}$ *(notaţiile sunt "tradiţionale"), unde*

$$\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Observaţie 1.4. 1) Mai sus am folosit convenţiile obişnuite $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.
2) Dacă $R = \infty$, atunci $\mathcal{K} = \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $R \in [0, \infty]$ definit ca în enunţul teoremei. Pentru orice $r < R$ şi orice $x \in (a - r, a + r)$ avem că

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \frac{|x-a|}{R} < \frac{r}{R} < 1,$$

astfel că, conform criteriului rădăcinii al lui Cauchy, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ este absolut convergentă. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus [a - R, a + R]$, atunci

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \frac{|x-a|}{R} > 1\,,$$

astfel că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ este divergentă. $\square$

Importanţa seriilor de puteri este dată de faptul că valorile funcţiilor cu care lucrăm în mod obişnuit(de obicei funcţii elementare, indefinit derivabile pe intervalele din domeniile lor de definiţie) sunt aproape întotdeauna aproximate pornind de la dezvoltările acestora în serie de puteri în jurul vreunui punct. Proprietatea de bază este(într-o formulare neriguroasă)

Propoziţie 1.5. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă, şi $a \in Int(D)$. Atunci există un interval $I \subseteq D$ centrat în a cu proprietatea că*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad , (\forall)x \in I.$$

Observaţie 1.6. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se numeşte seria Taylor asociată funcţiei f în punctul a.

Exemplu 1.7. Dezvoltările în punctul $a = 0$ ale câtorva dintre funcţiile cele mai des folosite sunt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad , (\forall)x \in \mathbb{R};$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad , (\forall)x \in \mathbb{R};$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad , (\forall)x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\cdot \ldots \cdot (r-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad , (\forall)x \in (-1, 1);$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad , (\forall)x \in (-1, 1];$$
$$ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) \quad , (\forall)x \in (-1, 1);$$
$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad , (\forall)x \in [-1, 1].$$

2 Funcţii generatoare

Definiţie 2.1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte funcţie generatoare asociată şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , (\forall)x \in D.$$

Exemplu 2.2. 1) Şirul $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ al puterilor unui număreal a are funcţia generatoare

$$f : \left(-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}\right) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{1-ax}\ ;$$

2) Şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ al invereselor numerelor naturale nenule are funcţia generatoare

$$f : [-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = -ln(1-x)\,.$$

Propoziţie 2.3. *Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale care verifică relaţia de recurenţă liniară de ordin k cu coeficienţi constanţi*

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \quad , (\forall)n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Atunci funcţia generatoare asociată şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are forma

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{P(x)}{1 - \sum\limits_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j}}\,,$$

unde $P \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom de grad cel mult $k-1$, ai cărui coeficienţi se pot determina în funcţie de termenii iniţiali $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ai şirului.

Demonstraţie. Din relaţia de recurenţă şi definiţia funcţiei generatoare, notând $Q_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{j-1} a_i x^i$, rezultă că

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}x^{n+k} = Q_k(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-1} c_j a_{n+j}\right) x^{n+k} +$$

$$= Q_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j} x^{n+j} \right) = Q_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} \left(f(x) - Q_j(x) \right) =$$

$$= f(x) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} + \left(Q_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} Q_j(x) \right) = f(x) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} + P(x) .$$

Evident $P(x) = Q_k(x) - \sum\limits_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} Q_j(x)$ este un polinom de grad cel mult $k-1$ şi rezultă acum afirmaţia din enunţ. $\square$

Observaţie 2.4. Considerând ecuaţia

$$r^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^j = 0 , \tag{2}$$

numită ecuaţia caracteristică asociată recurenţei liniare cu coeficienţi constanţi (1), având rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_l$ cu multiplicităţile $m_1, m_2, \ldots, m_l$, are loc relaţia

$$1 - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} = \prod_{i=1}^{l} (1 - r_i x)^{m_i} .$$

Corolar 2.5. *Expresia funcţiei caracteristice asociate recurenţei (1) are forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} \frac{A_i(x)}{(1 - r_i x)^{m_i}} ,$$

unde $A_i \in \mathbb{R}[X]$ sunt polinoame de grade $\partial(A_i) \leq m_i - 1$.

Observaţie 2.6. Dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $g : \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(1-rx)^m}$ este

$$\frac{1}{(1 - rx)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{m+n-1}^{n} r^n x^n .$$

Corolar 2.7. *Expresia termenului general a_n al unui şir care verifică relaţia de recurenţă (1) este*

$$a_n = \sum_{i=1}^{l} P_i(n) r_i^n ,$$

unde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ sunt rădăcinile ecuaţiei caractersitice (2) cu multiplicităţile $m_1, m_2, \ldots, m_l$, iar $P_i \in \mathbb{R}[X]$ sunt polinoame de grade $\partial(P_i) \leq m_i - 1$.

Exemplu 2.8. Pentru şirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al lui Fibonacci, definit prin $F_0 = 0, F_1 = 1$ şi $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, funcţia generatoare are expresia

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} .$$

Ecuaţia caracteristică $r^2 - r - 1 = 0$ are rădăcinile simple $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pentru funcţia generatoare obţinem atunci expresia

$$f(x) = \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \left(\frac{1}{1 - r_1 x} - \frac{1}{1 - r_2 x} \right),$$

astfel că expresia termenului general al şirului lui Fibonacci este

$$F_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Exemplu 2.9. Un alt exemplu celebru de şir recurent este şirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al numerelor lui Catalan definit prin $T_0 = 0, T_1 = 1$ şi $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k}$, $(\forall) n \geq 2$. Numerele lui Catalan modelează, de exemplu, numărul de moduri în care pot fi puse parantezele pentru a grupa factorii unui produs de n factori. Ţinând cont de relaţia de recurenţă, funcţia generatoare f asociată numerelor lui Catalan verifică relaţia

$$f^2(x) = f(x) - x\,.$$

Cum $f(0) = 0$, expresia funcţiei generatoare este atunci

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}\,.$$

Identificând coeficienţii dezvoltării în serie Taylor a funcţiei f, obţinem atunci că

$$T_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n-3}{2}\right) \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot 4^n =$$

$$= \frac{(2n-3)!! \cdot 2^n}{2 \cdot n!} = \frac{(2n-2)! \cdot 2^{n-1}}{n! \cdot (2n-2)!!} = \frac{(2n-2)!}{n! \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n} \cdot C_{2n-2}^{n-1}\,.$$